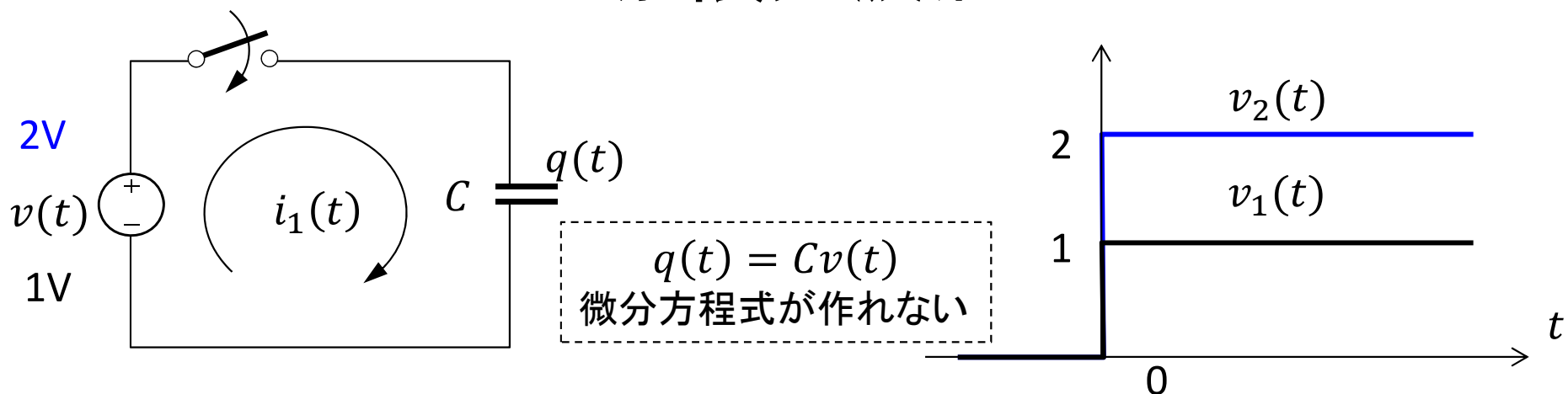


# 無限大波形とインパルス応答

# 無限大波形



$t = 0$  にスイッチを入れる

回路には単位ステップ関数で表される  $v_1(t) = u(t)$  を回路に与えたことと等価

コンデンサ電荷  $q(t)$  の時間変化に相当する電流  $i_1(t)$  が回路に流れるので、

$$i_1(0) = \left. \frac{dq(t)}{dt} \right|_{t=0} = C \left. \frac{dv_1(t)}{dt} \right|_{t=0} \quad \text{微分を差分に置き換えて } \Delta t \text{ を } 0 \text{ に近づけると}$$

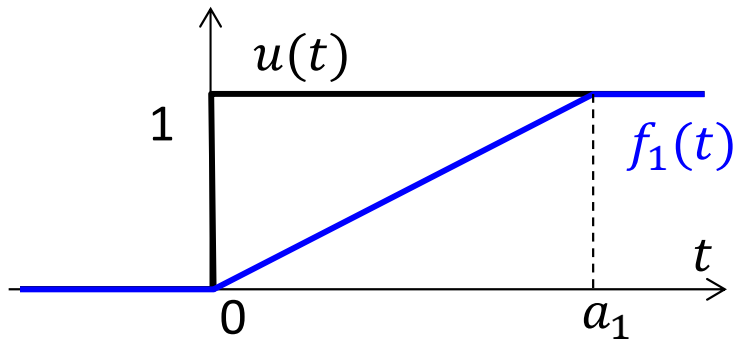
$$\cong C \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1(\Delta t/2) - v_1(-\Delta t/2)}{\Delta t} = \infty \quad t = 0 \text{ に } \boxed{\quad} \text{ の電流が流れることになる}$$

単位ステップ関数の2倍で表される電圧  $v_2(t) = 2u(t)$  が印加されても  $\boxed{\quad}$

$t \neq 0$  以外は電圧一定なので、 $\boxed{\quad}$  であり、電流には両者の違いが表れない。

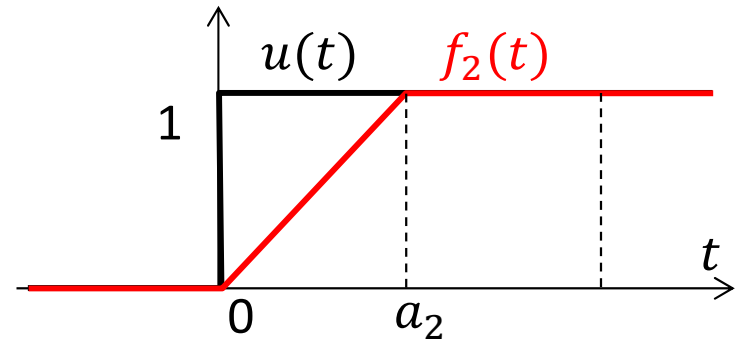
瞬間的に無限大になる波形を定義すれば、このような電流の数学的表現が可能。

# デルタ関数 $\delta(t)$



$t = 0 \rightarrow a$  において、大きさが0から1まで線形に変化するような関数  $f(t)$  を考える。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t/a & (0 \leq t < a) \\ 1 & (t \geq a) \end{cases}$$



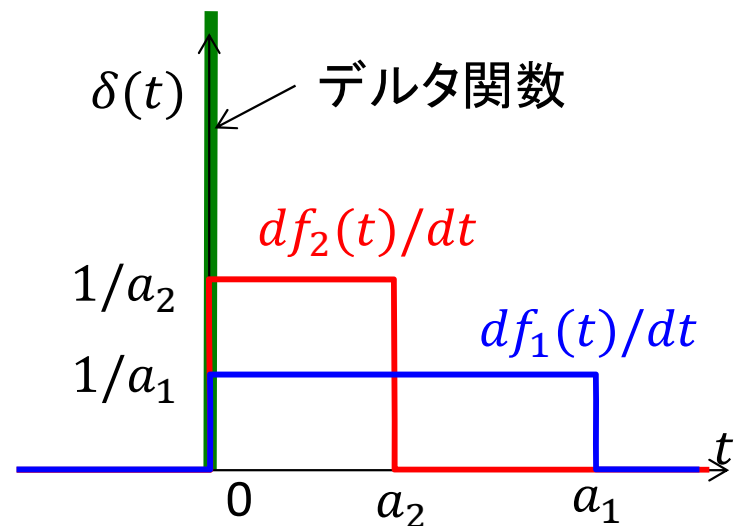
傾きによって様々なパターンが考えられる

$f(t)$  の微分波形は以下のような  であり、

$$\dot{f}(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0, t \geq a) \\ 1/a & (0 \leq t < a) \end{cases}$$

傾きの異なるパルスでもその  となっている。

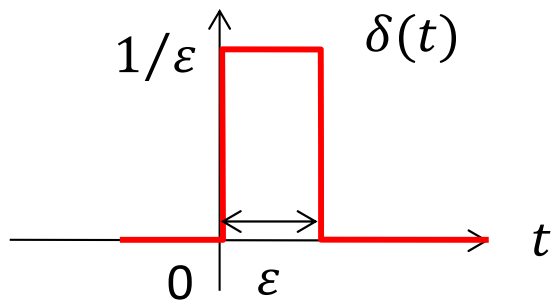
$a \rightarrow 0$  の極限を考えると、この微分波形  $\delta(t)$  は幅0、大きさ $\infty$ 、面積1を持ち  と呼ばれる。



デルタ関数は単位ステップ関数の微分であり、**単位インパルス**とも呼ばれる

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

# ディラックのデルタ関数



デルタ関数  $\delta(t)$  は  ともよばれ、  
以下のように定義できる

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & (t < 0, t \geq \varepsilon) \\ 1/\varepsilon & (0 \leq t < \varepsilon) \end{cases}$$

時刻0でのみ振幅 $\infty$ となるがその  である

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \delta(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} 1/\varepsilon dt = 1$$

時間の単位を  
持つことに注意

デルタ関数とある関数との積は、デルタ関数が  $t = 0$  でのみ値を持つため、

$$w(t)\delta(t) \cong \text{  } \quad (-\infty < t < \infty)$$

(右辺は単位インパルスの  $w(0)$  倍の波形)

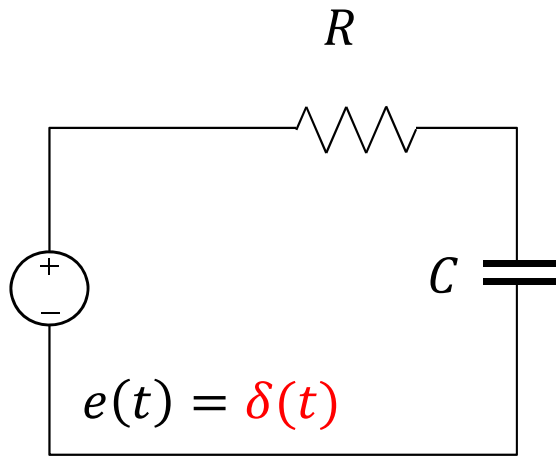
両辺を積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\delta(t) dt = w(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = w(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \delta(t) dt = \text{  }$$

ある関数に  $\tau$  だけ遅れたデルタ関数  $\delta(t - \tau)$  をかけて積分することは、その関数の

$t = \tau$  での  を取り出す操作と等価  $\rightarrow$  プロビング関数

# インパルス応答



インパルス状の電源波形を初期値ゼロ状態の回路に印加したとき、その応答を  という

この応答を求めるには、 $t = 0$  でスイッチを閉じ、 $t = \varepsilon$  で開くときの挙動を解析し、 $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限を考えればよい。

(ただし電流は流れるものとする)

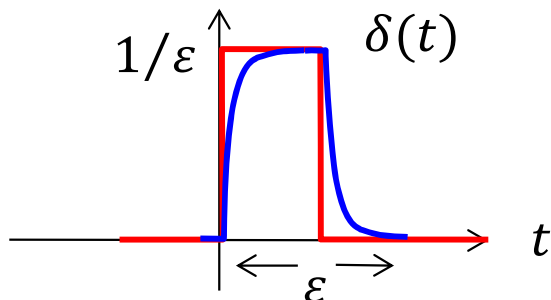
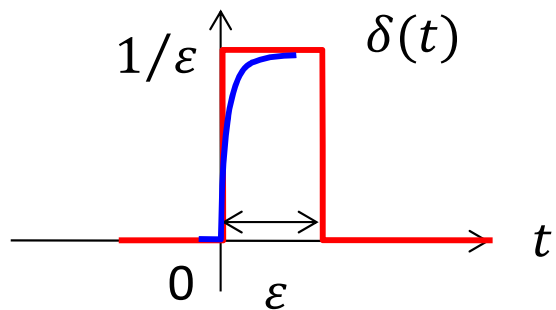
$t = 0$  でスイッチを開けたときコンデンサの電圧は時定数  $RC$  で0から  まで増加していくので、

$$v_c(t) = \frac{1}{\varepsilon} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (0 < t \leq \varepsilon)$$

$t = \varepsilon$  での電圧  $v_\varepsilon$  は  $v_\varepsilon = v_c(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} (1 - e^{-\frac{\varepsilon}{RC}})$

$t = \varepsilon$  でスイッチを開けたとき、コンデンサの電圧は時定数  $RC$  で  に減衰していくので、

$$v_c(t) = v_\varepsilon e^{-\frac{t-\varepsilon}{RC}} \quad (t > \varepsilon)$$

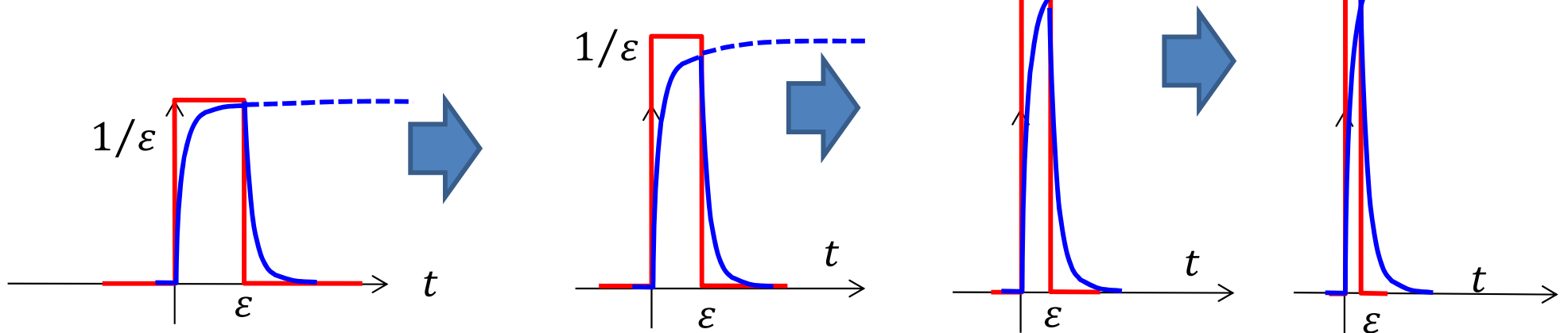


# インパルス応答

代入すると

$$v_c(t) = \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - e^{-\frac{\varepsilon}{RC}} \right) e^{-\frac{t-\varepsilon}{RC}} = \frac{e^{-\frac{t-\varepsilon}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}}}{\varepsilon}$$

$$f(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \text{ とおくと } v_c(t) = \frac{f(t-\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}$$



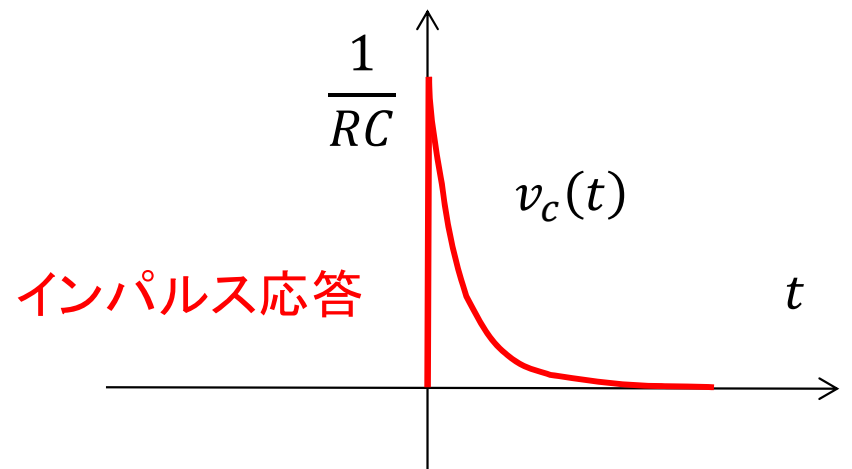
時間方向には同じ時定数で増加、減少する。減少時の初期値がパルス幅で異なる

$$v_c(t) = -\frac{e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t-\varepsilon}{RC}}}{\varepsilon}$$

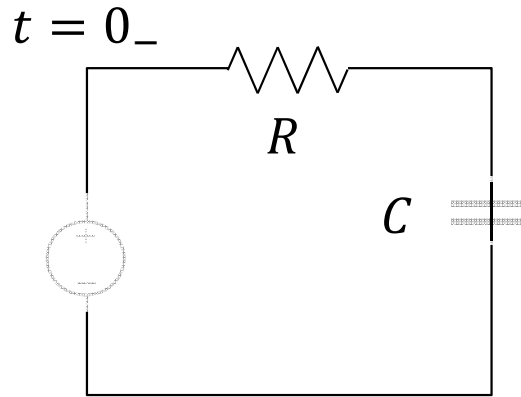
( $\varepsilon=0$ の極限をとれば微分の定義式)

$\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_c(t) = \frac{d}{dt} (-e^{-\frac{t}{RC}}) = \boxed{\phantom{0}}$$



# インパルス応答の動的挙動

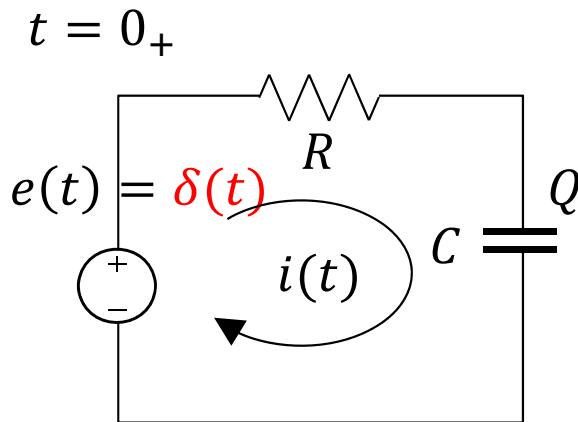


コンデンサ電圧の連続性より、 $t = 0_-$ ではコンデンサ電圧は0なので、コンデンサは  と等価

$t = 0_+$ で、 にすべての電圧がかかる

$i(t) = \delta(t)/R$ の電流が回路に流れる

回路は  の強さのインパルス電流を流す

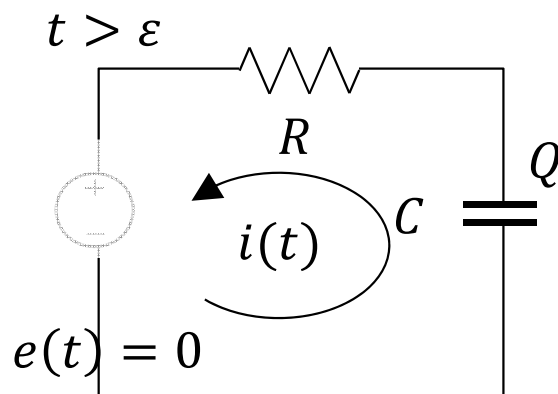


電流が流れればコンデンサに電荷 $Q$ が蓄積されるため、

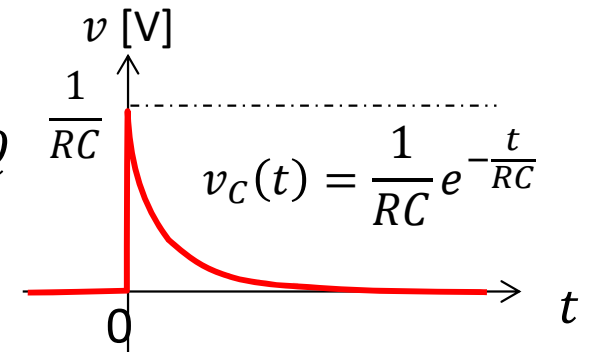
$$Q = \int_{-\infty}^t \frac{\delta(t)}{R} dt = \frac{1}{R} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \delta(t) dt = \frac{1}{R}$$

この現象は、時間 $\varepsilon$ の間に終了するため、実際には

にコンデンサに電荷 $Q$ がたまることになる

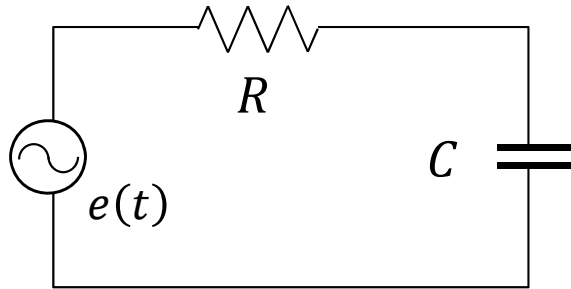


その後、電源電圧は0になるため、電源は  し、コンデンサの電荷 $Q$ が放電されて、抵抗に消費されながら、時定数 $RC$ で減衰する



初期電荷  のコンデンサの放電時の過渡応答と同じ

# 交流回路解析



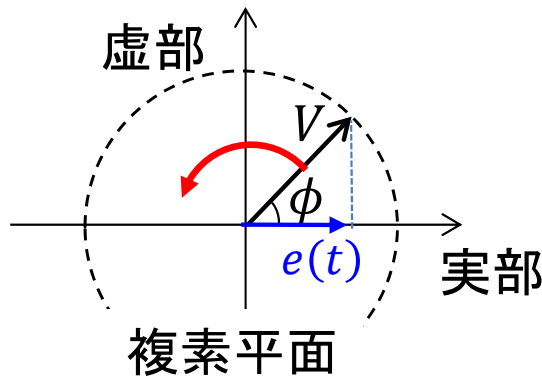
RC直列回路に交流電圧  $e(t) = V \cos(\omega_0 t + \phi)$  を印加する  
 電源の振幅  $V$ 、位相  $\phi$  は複素振幅  $\dot{V}$  でフェーザ表示できる

$$\dot{V} = \boxed{\phantom{V}}$$

複素電源波形もフェーザ表示すると

$$\dot{e}(t) = \dot{V} e^{j\omega_0 t}$$

$\dot{e}(t)$  は複素平面においてベクトル  $\dot{V}$  が時間とともに角周波数  $\omega_0$  で回転し、その実軸への投影 ( $\dot{e}(t)$  の実部) が  $e(t)$  と等価



$$e(t) = \text{Re}[\dot{V} e^{j\omega_0 t}]$$

回路の複素インピーダンス  $\dot{Z}$  は一般に  $\dot{Z} =$

$$\boxed{\phantom{Z}}$$

複素電流  $\dot{i}$  は 
$$\dot{i} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}} = \frac{j\omega_0 C + (\omega_0 C)^2 R}{1 + (\omega_0 C R)^2} \dot{V}$$

電源が正弦波交流であれば、その波形をフェーザ表示し、**複素振幅**、**複素インピーダンス** を考えることにより、直流電源における取扱いと同様に  $\boxed{\phantom{Z}}$  で取り扱える。

定常解は下のような操作を行い時間波形を再現すればよい。(周波数は不変)

$$i(t) = \text{Re}[\dot{i} e^{j\omega_0 t}]$$



# フェーザ表示とフーリエ変換

フェーザ表示法は時間領域の問題を周波数領域の問題に置き換えて解くことと等価

$$e(t) = \text{Re}[\dot{V}e^{j\omega_0 t}] = (\dot{V}e^{j\omega_0 t} + \dot{V}^*e^{-j\omega_0 t})/2$$

正弦波をフーリエ変換し、周波数領域で議論

フーリエ変換

$$\dot{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t)\exp(-j2\pi ft)dt$$

有限のエネルギーでないため、フーリエ変換できない。積分区間  $T$  で考える

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-T/2}^{T/2} e(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \{\dot{V}e^{j\omega_0 t} + \dot{V}^*e^{-j\omega_0 t}\} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{V}e^{-j(\omega-\omega_0)t} + \dot{V}^*e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt \\ &= \frac{\dot{V}}{2} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt + \frac{\dot{V}^*}{2} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{-j\omega T} [e^{-j\omega t}]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{1}{j\omega T} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}) \\ &= \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \end{aligned}$$

積分範囲  $T$  を無限大とすると  $\omega$  の関数としてデルタ関数と似た性質

$$\lim_{T \rightarrow \infty} a(\omega) = \begin{cases} \square & (\omega = 0) \\ \square & (\omega \neq 0) \end{cases}$$

数学的厳密さは無視して、デルタ関数で近似する

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T a(\omega) \cong \square$$

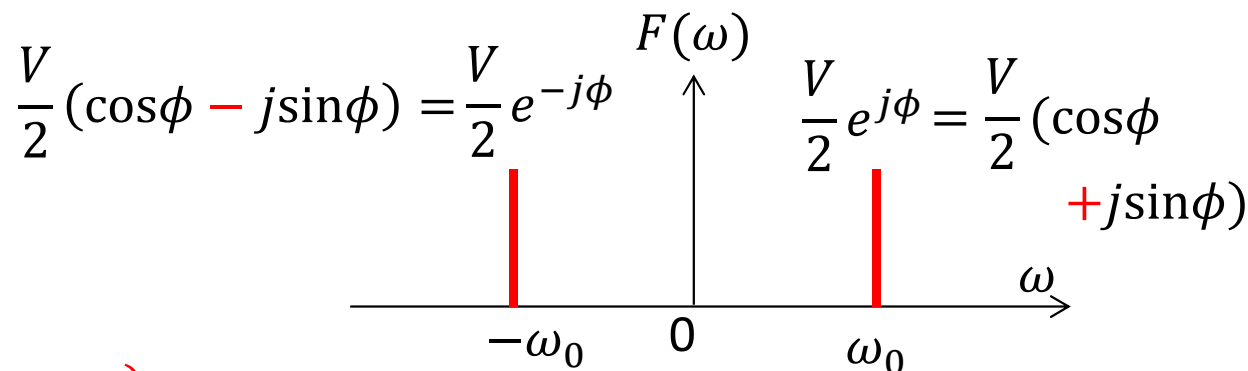
# 交流回路解析とフーリエ変換

$$e(t) = V \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e(t) e^{-j\omega t} dt$$



$$\propto \frac{V}{2} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{V^*}{2} \delta(\omega + \omega_0)$$



単一交流波形は周波数領域では正の角周波数  $\omega_0$  と、負の角周波数  $-\omega_0$  だけに値を持つ  で表される。

実関数のフーリエ変換なので、負の周波数の周波数成分は正の周波数成分の  で与えられる

線形回路において  ことは分かっている

正の周波数の周波数成分  $V e^{j\phi}$  の応答だけを代数的に考えればよい。

電気回路の解析は、時間領域、周波数領域どちらでも解きやすい方で解けばよい。  
たとえば、 $e(t) = V$  のように時間変化しなければ、時間領域で代数的に解く

過渡状態の解析において代数的に解く方法はないだろうか？

# ラプラス変換の基礎

# 過渡解析とラプラス変換

過渡状態の解析を代数的に解ける変換はないだろうか？

$e(t)$ が孤立波形(有限のエネルギーを持つ)のときはフーリエ変換が定義できる

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e(t) e^{-j\omega t} dt$$

一方、 $e(t)$ が連続的な周期関数では無限のエネルギーを持つため、フーリエ変換は  してしまう。

解析すべき波形に振幅の減衰項  $e^{-\sigma t}$  ( $\sigma > 0$ ) を与えると、安定に計算できる  
ただし、 $t < 0$  で  $e^{-\sigma t}$  は発散するので、 のみで考えるのがミソ

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

ここで、 ( $\sigma > 0$ ) なる複素変数  $s$  を導入すると

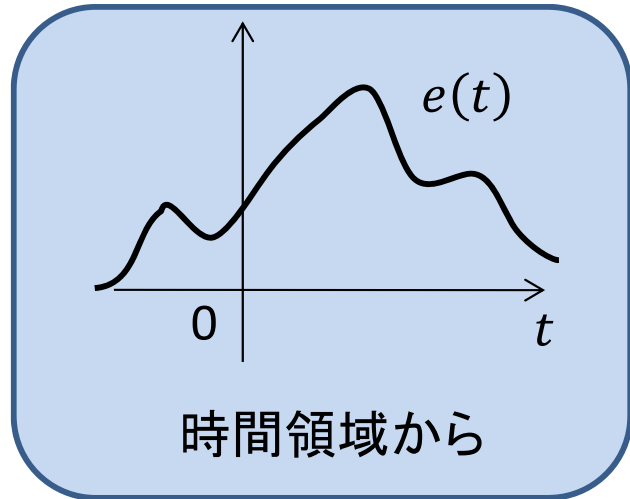
以下のような積分変換に帰着する

$$F(s) = \int_0^{\infty} e(t) e^{-st} dt$$

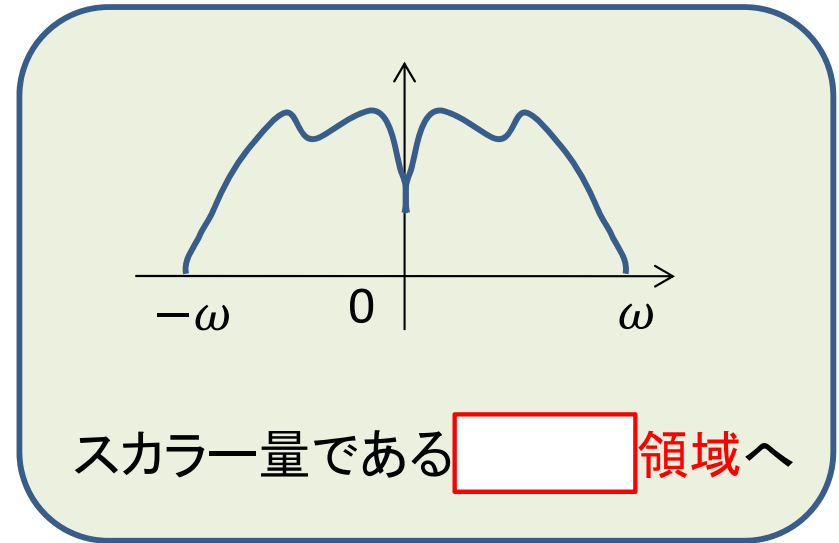
$e(t)$  の形によっては  $F(s)$  は簡単な式になる。  
 と呼ぶ

ラプラス変換はフーリエ変換よりもより多くの波形を収束させることができる

# フーリエ変換とラプラス変換

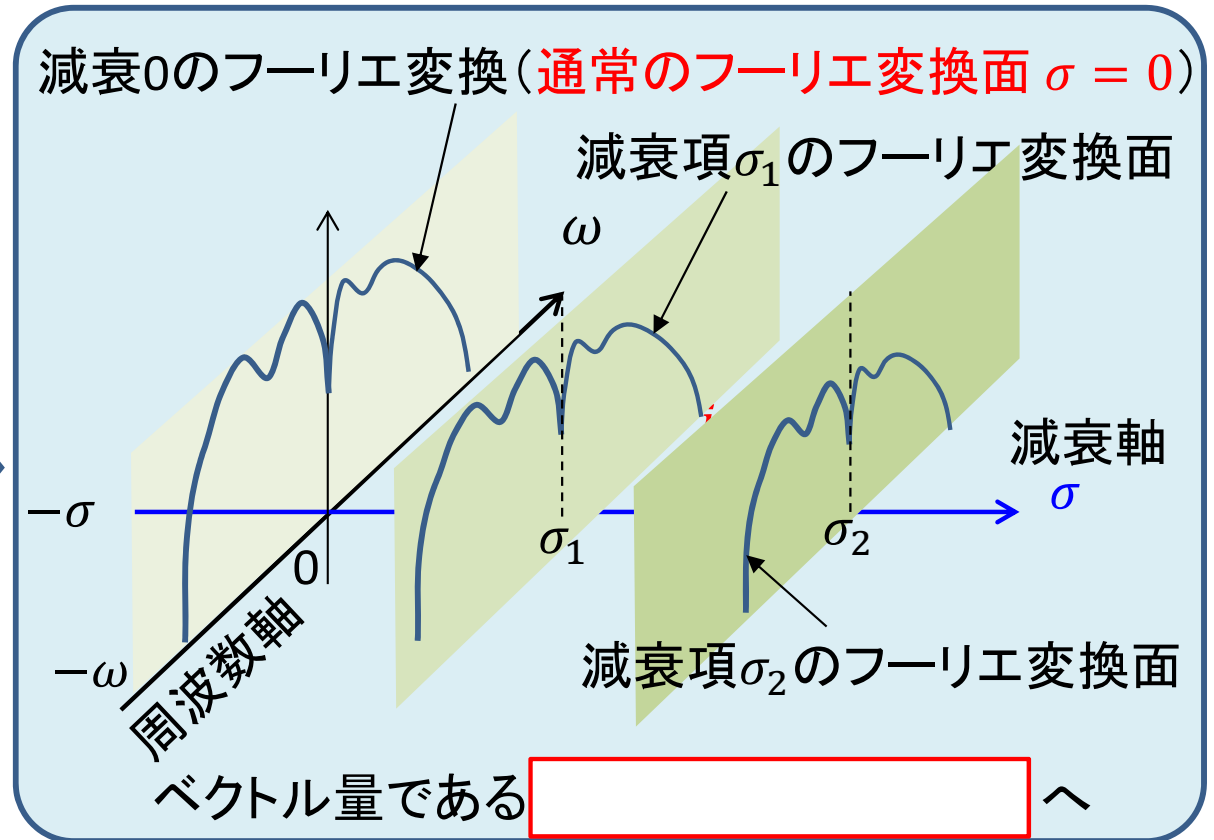
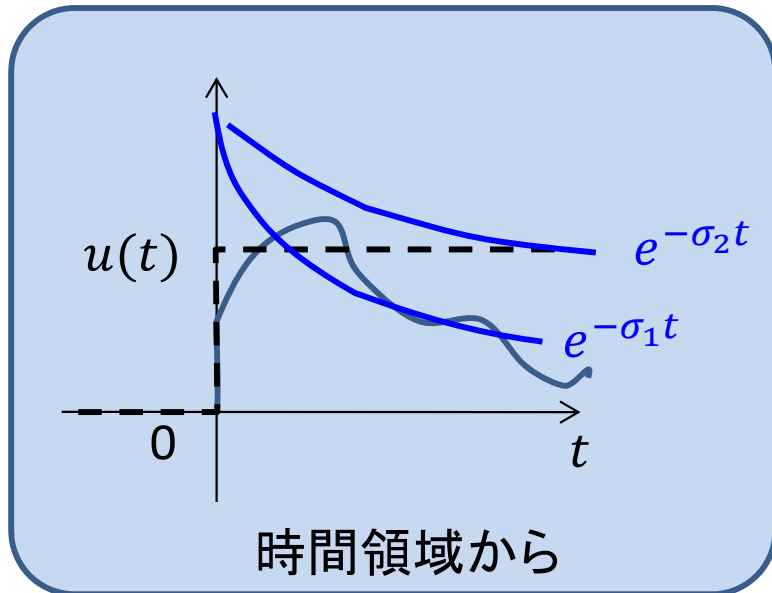


フーリエ変換



## ラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} e(t) e^{-st} dt$$



# ラプラス変換

原関数を $f(t)$ とすると、 $u(t)$ をステップ関数とした以下の変換をラプラス変換という

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) u(t) e^{-st} dt$$

原関数は $f(t)$ ではなく、であることに注意

ラプラス逆変換も存在し

$$f(t)u(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (\text{複素積分なのでこの積分は難解})$$

$f(t)$ 、 $F(s)$ は1対1に対応するので、一般には下のラプラス変換表を用いる

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	<b>1</b>	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$\delta^{(n)}$	$s^n$	$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$	$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
$u(t)$ (定数1)	$\frac{1}{s}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

逆ラプラス変換では上記全ての $f(t)$ には $u(t)$ がかかっているものとみなす。

# 微分、積分法則の導出

微分のラプラス変換は

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \int_0^{\infty} \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} e^{-st} dt$$

関数の積の微分から

$$\frac{d}{dt}\{f(t)e^{-st}\} = e^{-st} \frac{d}{dt}f(t) - se^{-st}f(t)$$

より、

$$\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}e^{-st} = sf(t)e^{-st} + \frac{d}{dt}\{f(t)e^{-st}\}$$

$$= \int_0^{\infty} sf(t)e^{-st} + \frac{d}{dt}\{f(t)e^{-st}\} dt$$

$$= sF(s) + [f(t)e^{-st}]_0^{\infty}$$

ラプラス変換が存在するためには、

$t \rightarrow \infty$ で  $f(t)e^{-st} = 0$  より

$$= sF(s) + (0 - f(0)e^{-s \cdot 0})$$

$$= \boxed{\phantom{0}} \quad \text{微分法則}$$

積分のラプラス変換は

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\zeta)d\zeta\right] = \int_0^{\infty} \left\{\int_{0+}^t f(\zeta)d\zeta\right\} e^{-st} dt$$

左の式の両辺を  $s$  で割り  $t$  で積分すると

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} [f(t)e^{-st}]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}e^{-st} dt \\ &= \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}e^{-st} dt \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$f(t) \rightarrow \int_0^t f(\zeta)d\zeta$  として、 $\textcircled{1}$ に代入

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\zeta)d\zeta\right] = \frac{1}{s} \int_0^0 f(\zeta)d\zeta + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

積分範囲が0なので  $\downarrow$   $F(s)$ の定義式  $\uparrow$

$$= \boxed{\phantom{0}} \quad \text{積分法則}$$

微分、積分演算が代数的に表現されている。 → 微分方程式が代数演算で表せる

# 変位、拡大、移動法則

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) u(t) e^{-st} dt$$

において、

$f(t)$ を時間  $a$  だけ遅らせた、  
 $f(t-a)u(t-a)$ のラプラス変換は

$$\int_0^{\infty} f(t-a)u(t-a)e^{-st} dt$$

$u(t-a)$ は  $t > a$  で1、 $t < a$  で0なので、  
積分範囲を変更することにより

$$= \int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st} dt \quad \tau = t-a \text{ より}$$

$$= \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+a)} d\tau$$

$$= e^{-sa} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{-sa} F(s)$$

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = \boxed{\phantom{e^{-sa} F(s)}}$$

移動法則

$f(t)$ に $e^{at}$ を掛けた波形のラプラス変換は

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \int_0^{\infty} e^{at}f(t)u(t)e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{\infty} f(t)u(t)e^{-(s-a)t} dt$$

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \boxed{\phantom{e^{-(s-a)} F(s)}}$$

変位法則

$f(t)$ の時間スケールを変えたラプラス変換は

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} f(at)u(t)e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{\infty} f(at)u(t)e^{-st} dt \quad \tau = at \text{ より}$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(\tau)u\left(\frac{\tau}{a}\right)e^{-\frac{s\tau}{a}} d\tau$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau$$

$$\mathcal{L}[f(at)] = \boxed{\phantom{\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)}}$$

拡大法則



# 二つの波形どうしの演算

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s) \quad \mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$$

なる二つの波形を考える。

このとき、以下の **線形性** が成立する

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = \boxed{\phantom{\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)]}}$$

積分演算は線形性が成立するので、容易に証明できる

S領域で積の関係は以下の畳み込み積分のラプラス変換で表される

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$$

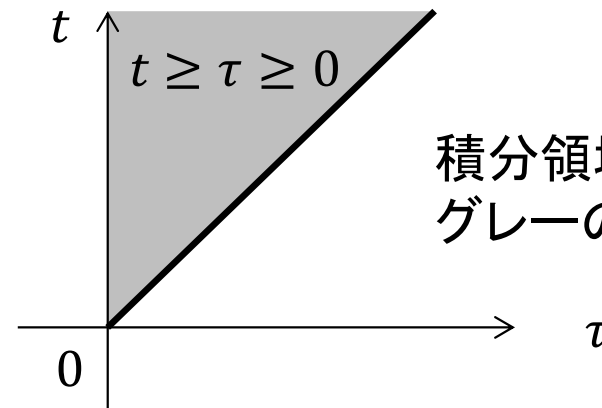
$$f_1(t) * f_2(t) = \boxed{\phantom{f_1(t) * f_2(t)}}$$

$$\begin{aligned} F_1(s)F_2(s) &= \int_0^\infty f_1(x)e^{-sx} dx \int_0^\infty f_2(y)e^{-sy} dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(x+y)} f_1(x)f_2(y) dx dy \end{aligned}$$

$t = x + y$ 、 $\tau = x$  と変数変換する

積分範囲は  $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$  なので

$$x = \tau \geq 0 \quad y = t - x \geq 0$$



積分領域は変換後、グレーの範囲

$$x = \tau, \quad y = t - \tau, \quad dx dy = d\tau dt$$

$\tau$  の積分範囲は  $t \geq \tau \geq 0$  より、

$$= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right\} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \{ f_1(t) * f_2(t) \} dt \quad \text{畳み込み法則}$$

# ラプラス変換の性質

	時間領域	s領域
微分	$\frac{d}{dt}f(t)$	$sF(s) - f(0_+)$
積分	$\int_{0_+}^t f(\zeta)d\zeta$	$\frac{F(s)}{s}$
線形性	$a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$	$a_1F_1(s) + a_2F_2(s)$
移動	$f(t - a)u(t - a)$	$e^{-as}F(s)$
変位	$f(t)e^{at}$	$F(s - a)$
畳込み積分	$f_1(t) * f_2(t)$ $= \int_0^t f_1(\zeta)f_2(t - \zeta)d\zeta$	$F_1(s)F_2(s)$

$$s = \sigma + j\omega$$

(電気回路の応答のような)時間領域での線形演算はs領域でも線形演算

時間軸での遅れはs領域での  の積

s領域での移動は時間軸での  $e^{-at}$  の積

s領域での  は時間領域で、畳込み積分

# ステップ関数の取り扱いについて

ステップ関数を用いて  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] = u(t)$  と書くのが正しい。

しかし、小テストでは  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] = 1$  のように書いていた

これは、逆ラプラス変換は  $(t \geq 0)$  で定義されており、 $t < 0$  での関数値が0であることが自明だからである。

一般に、逆ラプラス変換後の  $f(t)$  は  $f(t)u(t)$  と表すべきだが、この  $u(t)$  は **省略可**

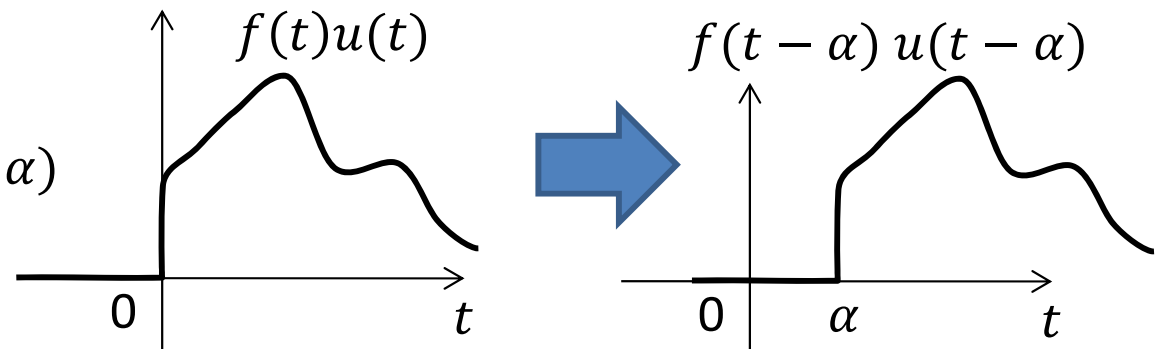
しかし  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)e^{-\alpha t}]$  のように、時間領域での移動が問題になる場合、

$u(t)$  を考慮する必要がある

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)e^{-\alpha t}] \neq f(t - \alpha)$$

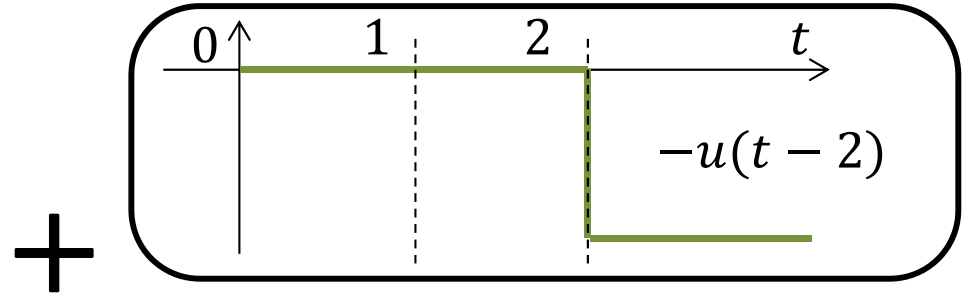
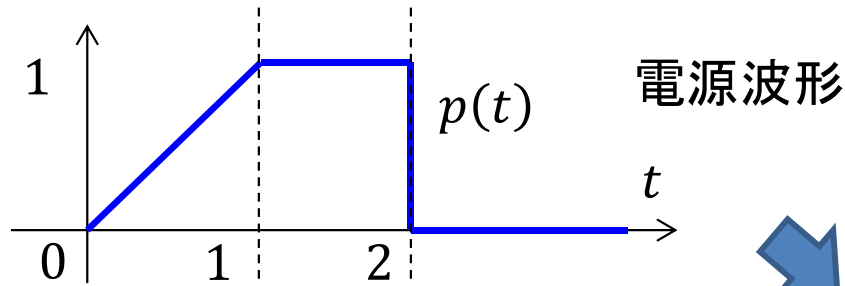
ではなく、

$$= f(t - \alpha) u(t - \alpha)$$

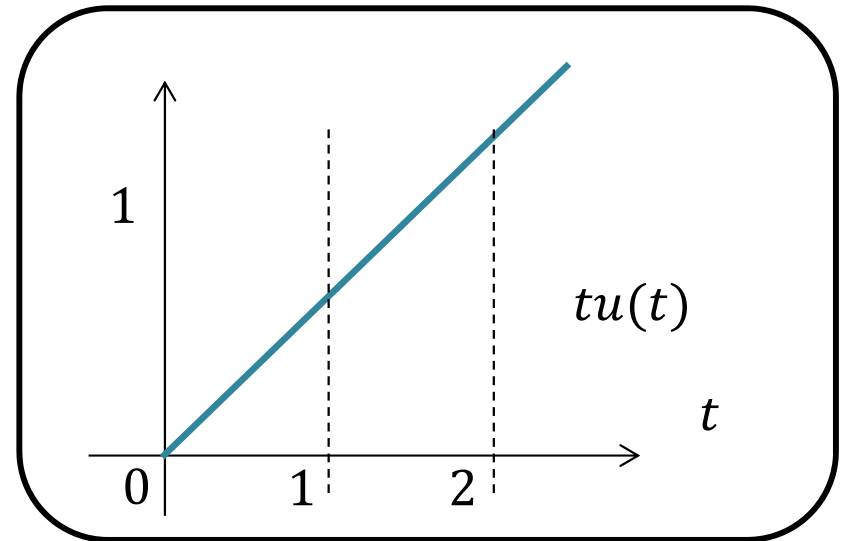
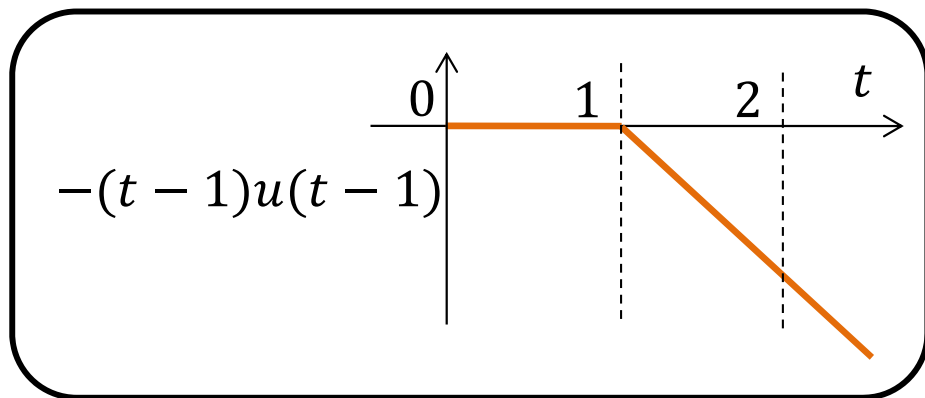
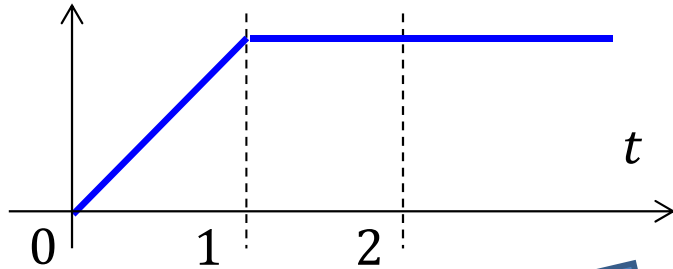


# パルス波形

基本波形の移動、線形和により様々なパルス波形を作成できる



3種類の波形の和で表せる

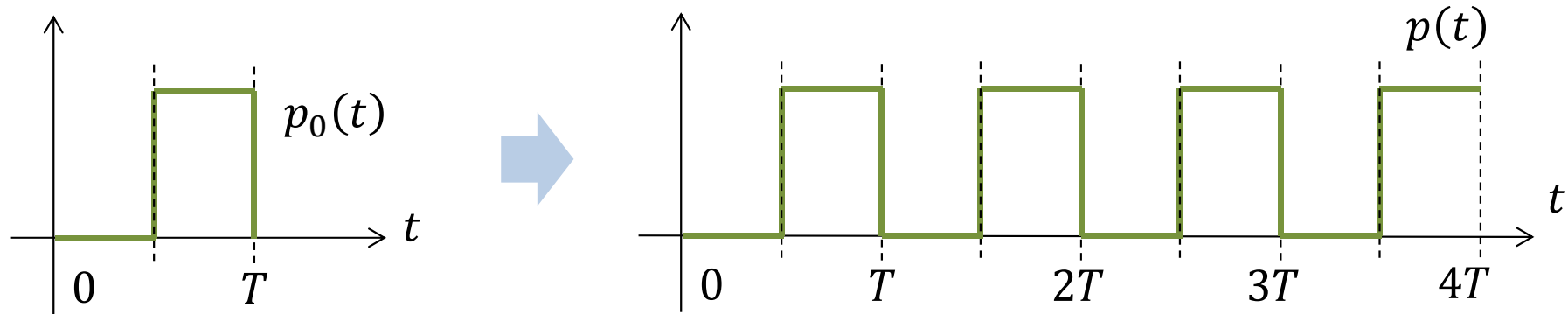


$$p(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) - u(t-2)$$

$$P(s) =$$

パルス波形の解析はラプラス変換の大きな利点

# 周期波形



$p_0(t)$ を基本波形とし、周期 $T$ で繰り返される周期波形を $p(t)$ とする

$p(t)$ は時間軸において、 $p_0(t)$ を $T$ 移動した波形、 $2T$ 移動した波形、 $3T$ 移動した波形、...の  
で表されるので、

$$p(t) = p_0(t) + p_0(t - T) + p_0(t - 2T) + p_0(t - 3T) + \dots$$

$p_0(t)$ のラプラス変換を $P_0(s)$ とすると

$$P(s) = P_0(s)(1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + e^{-4sT} + \dots + e^{-\infty sT})$$

ここで、

$$e^{-sT} P(s) = P_0(s)(e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + e^{-4sT} + \dots + e^{-\infty sT})$$

ラプラス変換の収束条件より  なので、

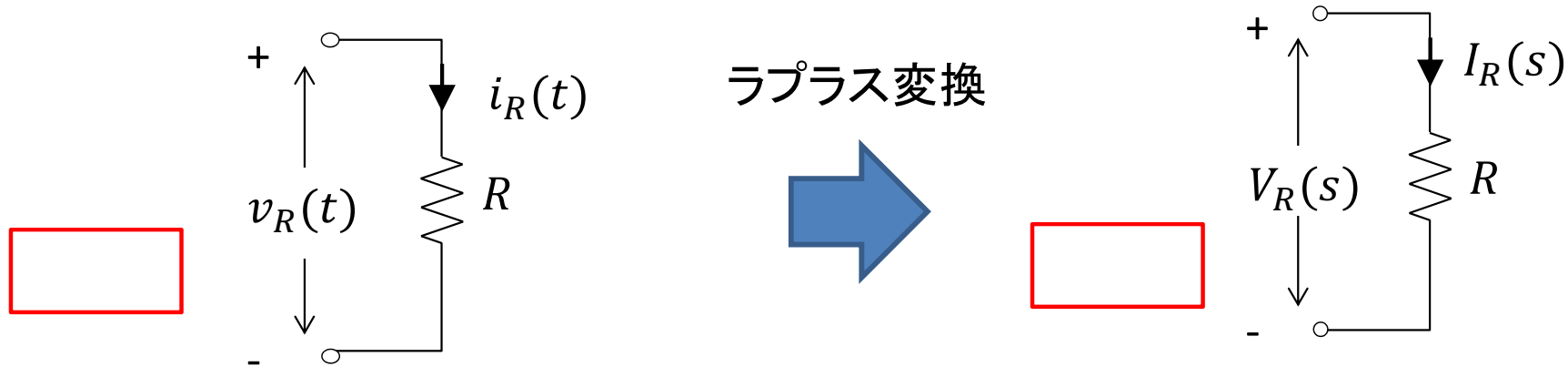
$$P_0(s) + e^{-sT} P(s) = P(s) \quad \text{より} \quad P(s) = P_0(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

$s$ 領域での  $1 - e^{-sT}$  の除算は、 $P_0(s)$ の逆ラプラス変換  $p_0(t)$  を  と等価

# ラプラス変換による動的解析

# 抵抗素子のラプラス変換

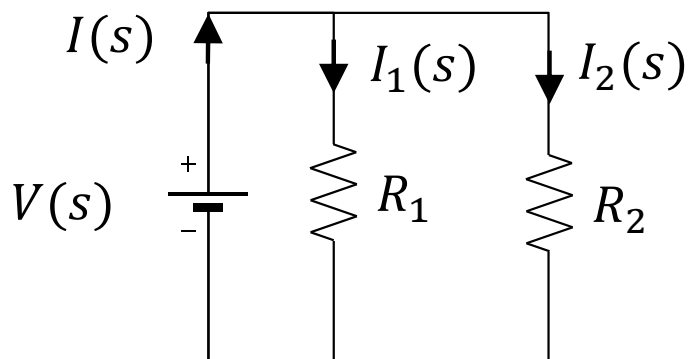
s領域での動的素子の表現式



$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

$$\mathcal{L}[v_R(t)] = \mathcal{L}[Ri_R(t)] = R\mathcal{L}[i_R(t)] \quad \text{線形性}$$
$$V_R(s) = RI_R(s)$$

s回路から、直接s領域での回路方程式を作る



$$V(s) = R_1 I_1(s) = R_2 I_2(s)$$

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s)$$

$$= \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V(s)$$

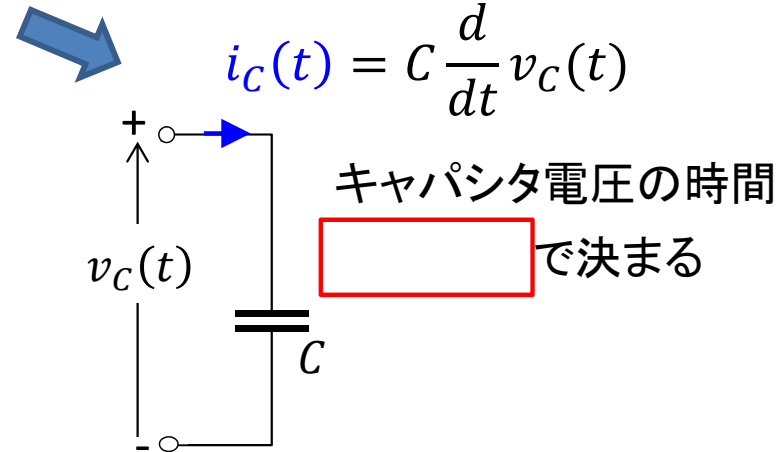
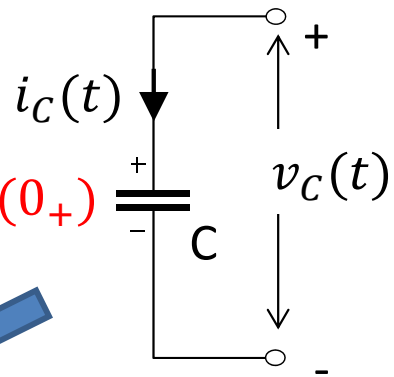
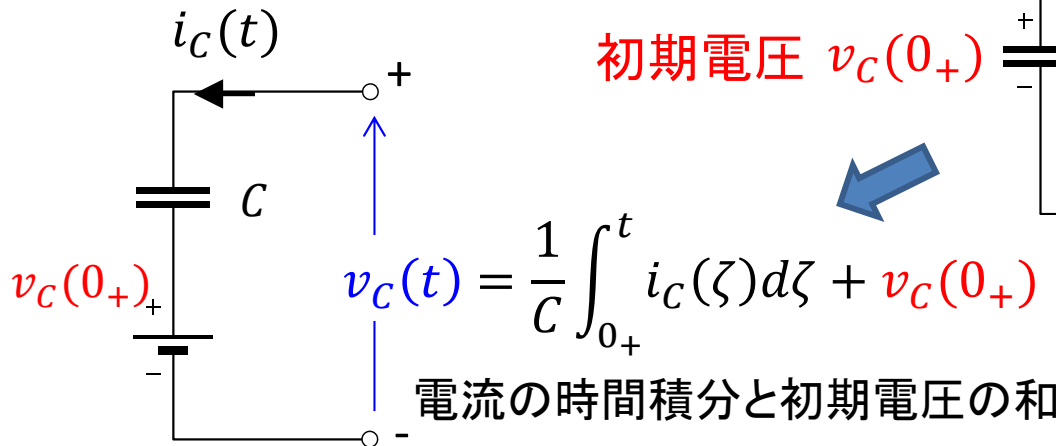
$$V(s) = \boxed{\phantom{000000}} I(s)$$

オームの法則、  
キルヒホッフの電圧、  
電流則も成立

並列抵抗、直列抵抗の演算はt領域でもs領域でも同じ

# キャパシタのs領域での等価モデル

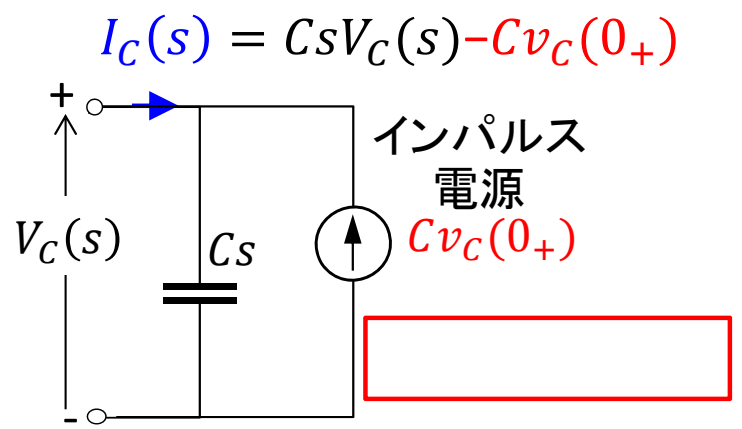
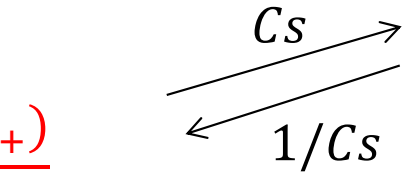
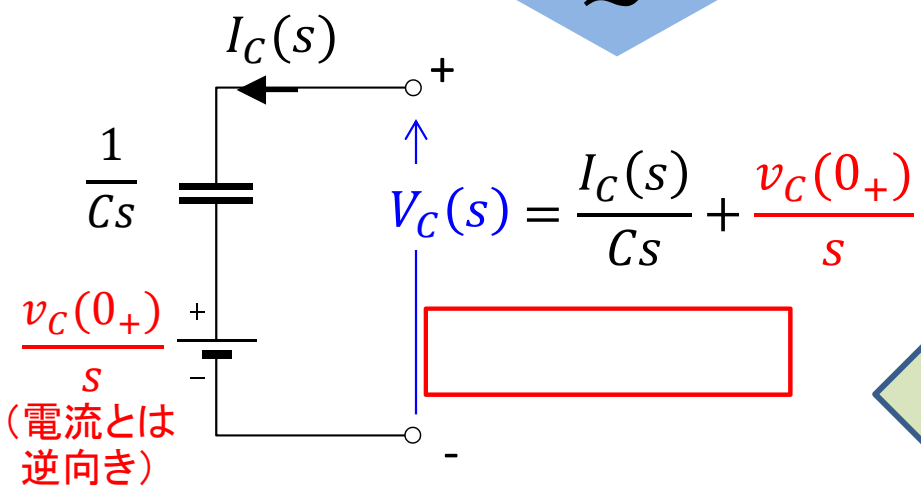
ある時刻 $t$ でのキャパシタ間電圧と  
キャパシタ電流の関係



$v_C(0_+)$ の [ ] と初期  
電圧0のキャパシタ

t 領域

s 領域



静電容量 $C$ のキャパシタのs領域表現は

[ ] がインピーダンスと等価

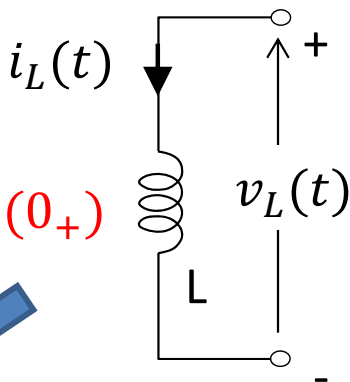
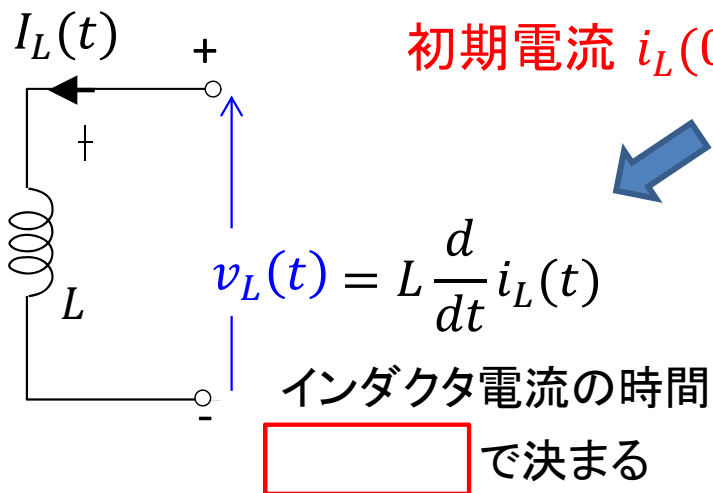
初期電圧が

キャパシタと直列な直流電圧源 [ ] と等価



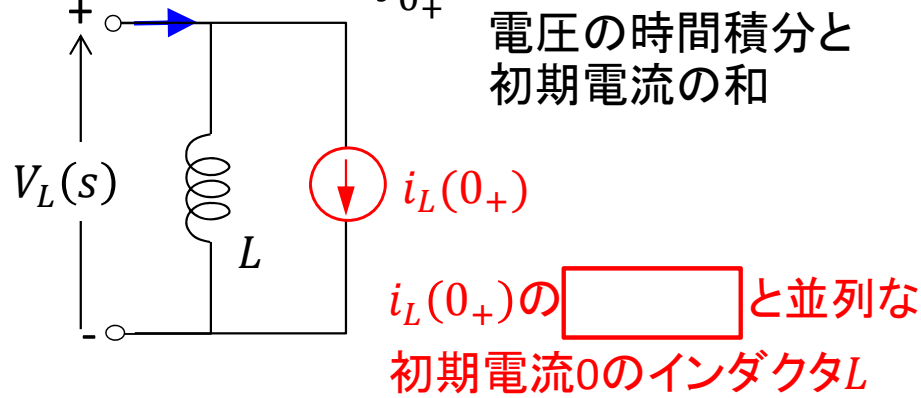
# インダクタのs領域での等価モデル

ある時刻 $t$ でのインダクタ間電圧とインダクタ電流の関係



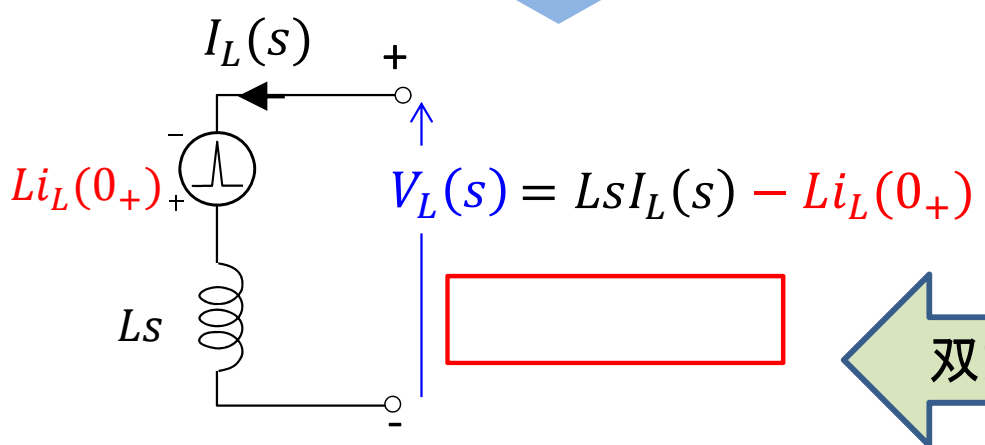
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{0_+}^t v_L(\zeta) d\zeta + i_L(0_+)$$

電圧の時間積分と初期電流の和

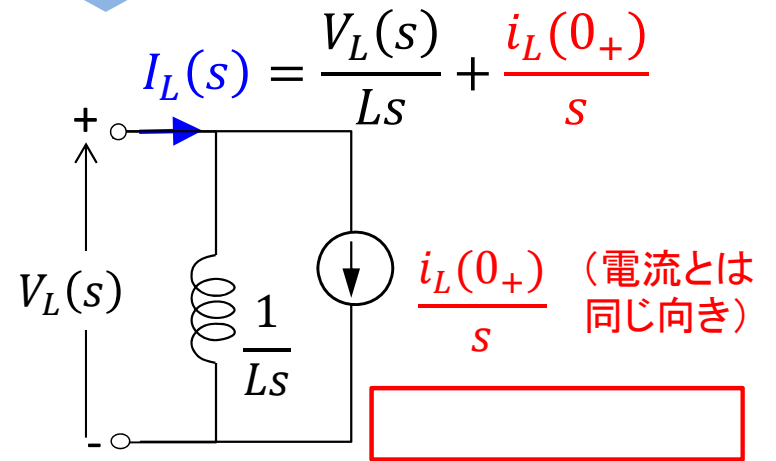


t 領域

s 領域



$1/Ls$   
 $Ls$

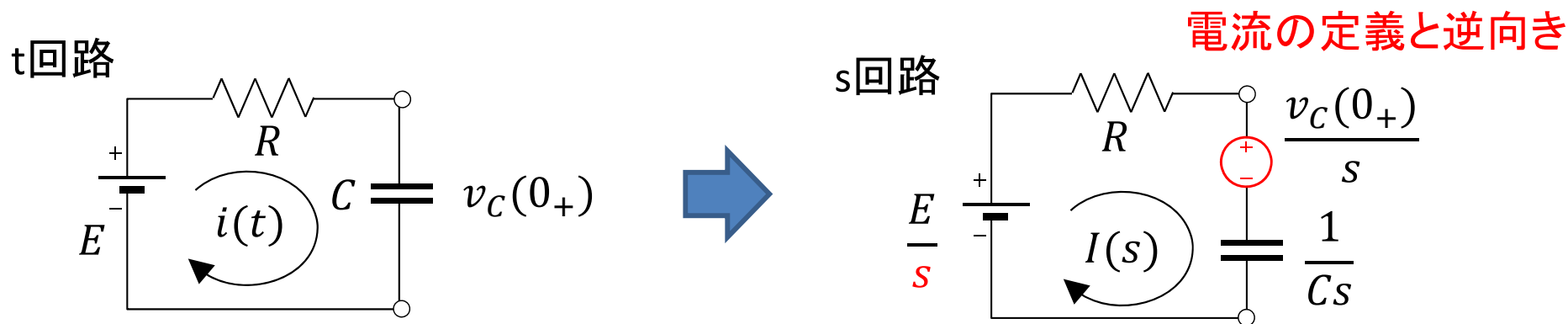


インダクタのs領域表現は  がインピーダンスと等価

初期電流がインダクタと直列なインパルス電圧源  と等価

# RC回路のs領域回路

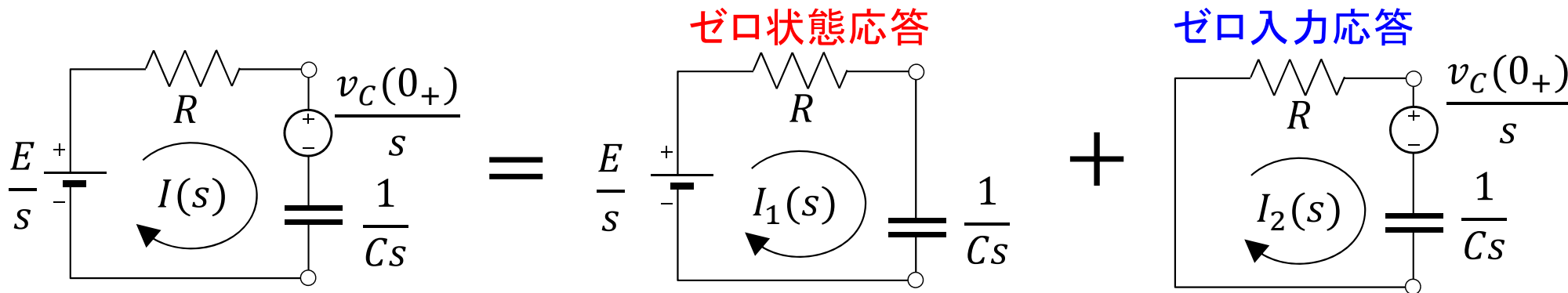
RC回路においてキャパシタの初期電圧を $v_C(0_+)$ とする、t回路からs回路に置き換えると



## 複数の電源のある回路

電圧源は   
電流源は

してそれぞれの電源毎の応答を計算し、後で和を取る



# s領域回路のインピーダンス

s領域での等価回路から、過渡応答の一般解は初期値がゼロの  と、電源のない  の和で表される。

すなわち、s領域で得られる応答の和で表される。例えば、電流  $I(s)$  は

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s)$$

ゼロ状態応答のs回路より

動的素子の電圧に関して、

$$\frac{E}{s} = RI_1(s) + \frac{I_1(s)}{Cs} = \left( R + \frac{1}{Cs} \right) I_1(s)$$

$$R + \frac{1}{Cs} = Z(s) \quad \text{と置くと、}$$

$$\frac{E}{s} = Z(s)I_1(s)$$

抵抗のインピーダンスを  $R$ 、  
キャパシタのインピーダンスを  $1/Cs$   
として、回路のs領域での合成イン  
ピーダンス  $Z(s)$  を考えればよい

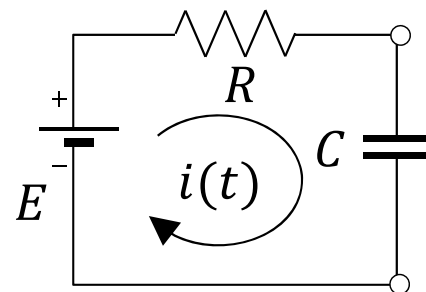
ゼロ入力応答のs回路より

同様に

$$-\frac{v_C(0_+)}{s} = RI_2(s) + \frac{I_2(s)}{Cs}$$

$$= \left( R + \frac{1}{Cs} \right) I_2(s)$$

$$= Z(s)I_2(s)$$



合成インピーダンス

$$Z(s) = \input{text}$$

# RC回路のラプラス変換による動的解析

$$I_1(s) = \frac{E}{sZ(s)}$$

$$I_2(s) = -\frac{v_C(0_+)}{sZ(s)}$$

ゼロ状態応答、ゼロ入力応答のs領域回路の  が解なので、

$$\begin{aligned} I(s) &= I_1(s) + I_2(s) = \frac{E - v_C(0_+)}{sZ(s)} = \frac{E - v_C(0_+)}{s\left(R + \frac{1}{Cs}\right)} \\ &= \frac{E - v_C(0_+)}{R} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \end{aligned}$$

$I(s)$ を逆ラプラス変換することにより、t領域での電流が得られる

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad \text{とすると} \quad I(s) = \frac{E - v_C(0_+)}{R} \quad \text{$$

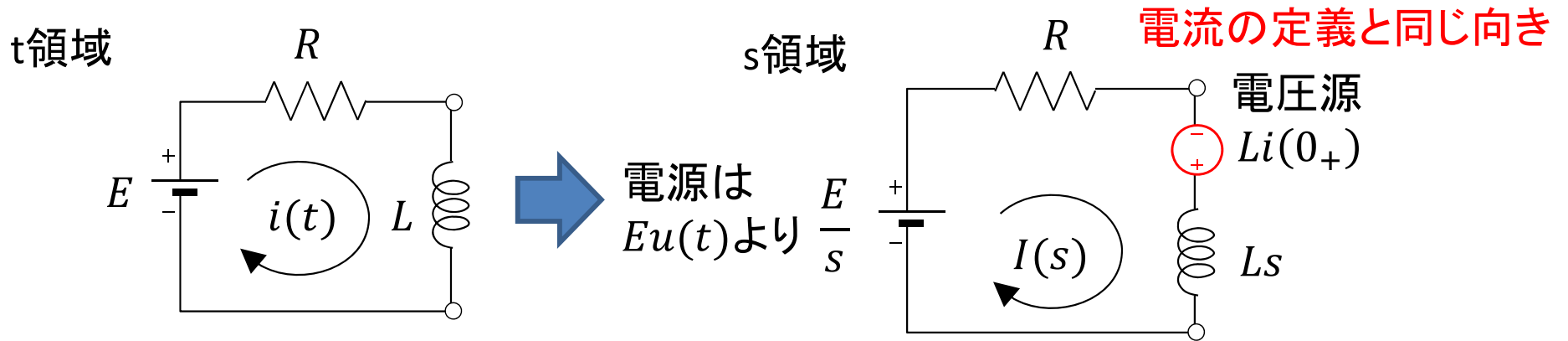
$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = u(t)$ 、変位法則  $\mathcal{L}^{-1}[F(s - a)] = e^{at}f(t) = e^{at}u(t)$ より

$$i(t) = \frac{E - v_C(0_+)}{R} \quad \text{$$

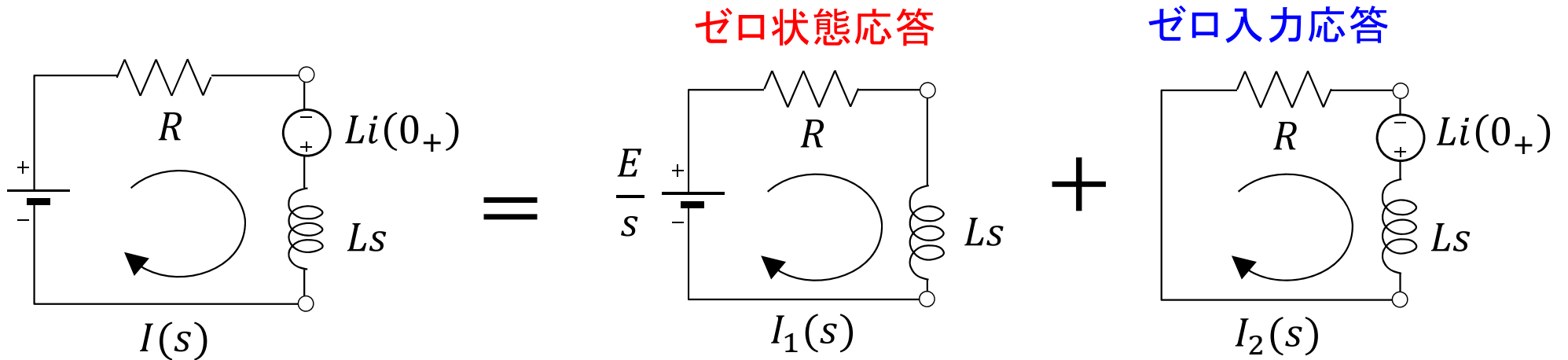
s領域での回路方程式を解き、逆ラプラス変換することで、過渡応答が直接得られる

# RL回路のs領域回路

RL回路において、インダクタの初期電流を  $i(0_+)$  とする。t回路からs回路に置き換えると



s領域回路は  のないゼロ状態応答と、 のないゼロ入力応答に分けられる



s回路の合成インピーダンス  $Z(s)$  は

$$Z(s) = \text{$$

# RL回路のラプラス変換による動的解析

ゼロ状態応答では

$$Z(s)I_1(s) = \frac{E}{s}$$

ゼロ入力応答の回路では

$$Z(s)I_2(s) - Li(0_+) = 0$$

両式の和を取り、 $I(s) = I_1(s) + I_2(s)$  より

$$(R + Ls)I(s) = \frac{E}{s} + Li(0_+)$$

$$I(s) = \frac{E}{L} \boxed{\phantom{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}}}} + \frac{i(0_+)}{s + \frac{R}{L}}$$

部分分数展開

$$\left( \frac{a}{s} - \frac{b}{s + \frac{R}{L}} \right) = \frac{(a - b)s + a \frac{R}{L}}{s(s + \frac{R}{L})}$$

$(a - b)s + a \frac{R}{L} = 1$  の恒等式を解くと

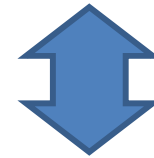
$$a = b = \frac{L}{R}$$

$$I(s) = \frac{E}{R} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right) + \frac{i(0_+)}{s + \frac{R}{L}}$$

逆ラプラス変換により

$$i(t) = \boxed{\phantom{\frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)}} + \boxed{\phantom{\frac{i(0_+)}{s + \frac{R}{L}}}} (t > 0)$$

ゼロ状態応答      ゼロ入力応答



$$i(t) = \underbrace{\frac{E}{R}}_{\text{定常解}} + \underbrace{\left\{ i(0_+) - \frac{E}{R} \right\} e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{過渡解}}$$

t回路からs回路に変換

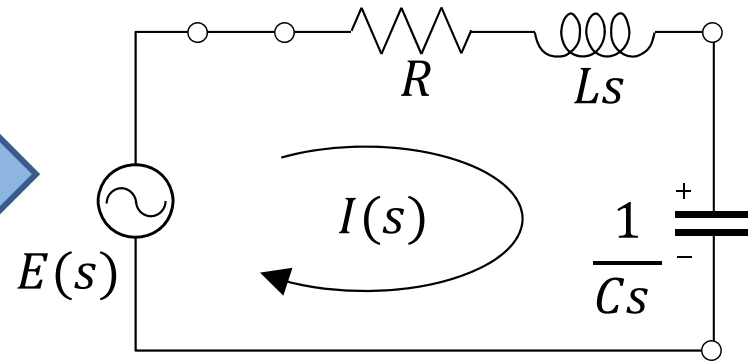
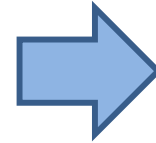
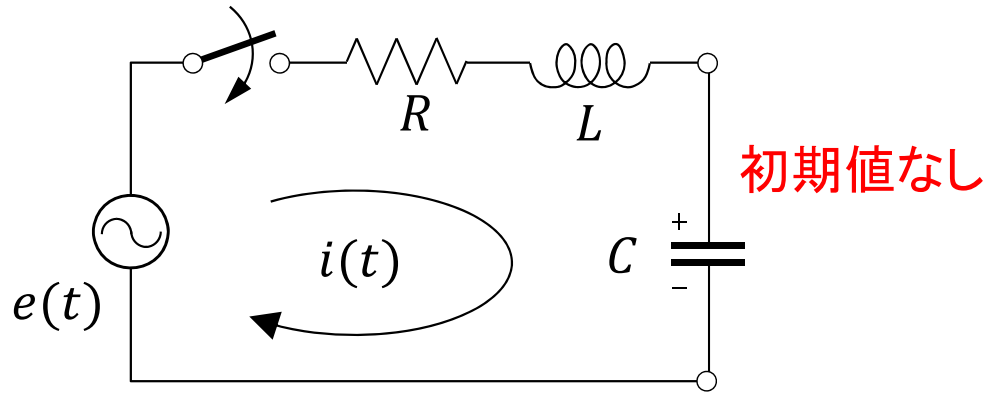
求めたいパラメータをs領域で代数表現

部分分数展開で  $\boxed{\phantom{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}}}}$  の形にする

逆ラプラス変換

t領域の一般解が直接得られる

# RLC回路のラプラス変換による動的解析(1)



s領域の回路方程式から

$$z(s) = \boxed{\phantom{R/Ls + 1/Cs}} \text{ とすると}$$

$$z(s)I(s) = E(s)$$

$$I(s) = \frac{sE(s)}{L} \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \text{ の根を } \lambda \text{ とする}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\lambda_0 \pm \sqrt{\lambda_0^2 - \omega_0^2} \quad (\lambda_0 > \omega_0)$$

$$\text{ここで、 } \lambda_0 = \boxed{\phantom{R/2L}} \quad \omega_0^2 = \boxed{\phantom{1/LC}}$$

$I(s)$ を部分分数展開したときの係数 $a$ は

$$I(s) = \frac{sE(s)}{L} \left( \frac{a}{s - \lambda_1} - \frac{a}{s - \lambda_2} \right)$$

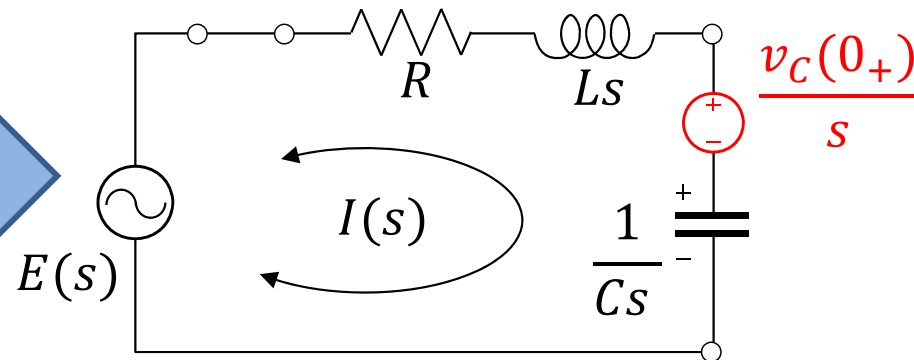
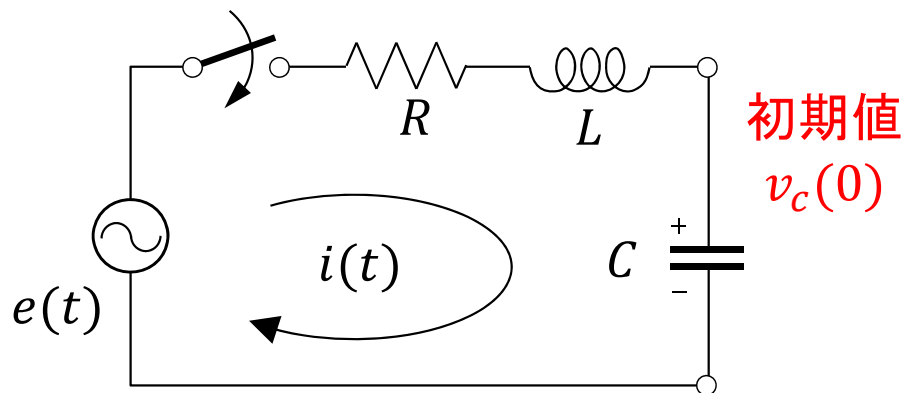
$$a\lambda_1 - a\lambda_2 = 1 \quad \text{より} \quad a = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$I(s) = \frac{sE(s)}{L2\sqrt{\lambda_0^2 - \omega_0^2}} \left( \frac{1}{s - \lambda_1} - \frac{1}{s - \lambda_2} \right)$$

ここで、 $e(t) = Eu(t)$  とすると  $E(s) = \boxed{\phantom{E/s}}$   
逆ラプラス変換により

$$i(t) = \frac{Ee^{-\lambda_0 t}}{2L} \frac{e^{\sqrt{\lambda_0^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\lambda_0^2 - \omega_0^2} t}}{\sqrt{\lambda_0^2 - \omega_0^2}}$$

# RLC回路のラプラス変換による動的解析(2)



s領域の回路方程式から

ゼロ状態応答

ゼロ入力応答

$$z(s)I_1(s) = E(s)$$

$$z(s)I_2(s) = \boxed{\phantom{0}}$$

$$z(s)I(s) = E(s) - \frac{v_c(0_+)}{s}$$

ここで、 $e(t) = Eu(t)$  とすると  $E(s) = \frac{E}{s}$

$$I(s) = \{E - v_c(0_+)\} \frac{1}{sZ(s)}$$

逆ラプラス変換により

$$i(t) = \frac{\{E - v_c(0_+)\} e^{-\lambda_0 t} e^{\sqrt{\lambda_0^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\lambda_0^2 - \omega_0^2} t}}{2L \sqrt{\lambda_0^2 - \omega_0^2}}$$

$v_c(0_+) = E$  のとき  $i(t) = 0$  となる

コンデンサに電源電圧分の電圧がチャージされている状態であり、コンデンサ+極と電源+側は等電位なので、電流が  $\boxed{\phantom{0}}$

$v_c(0_+) = 2E$  のとき  $i(t) = -i(t)$

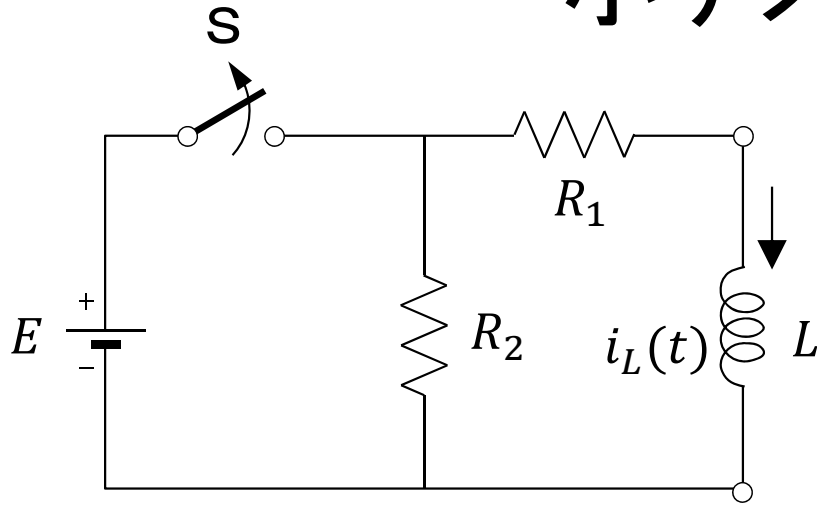
at  $v_c(0_+) = 0$

コンデンサ+極に対して電源+側の電位がE低いので、 $\boxed{\phantom{0}}$ 電流が流れる

コンデンサの初期電圧は直流電圧源と等価な働き



# 小テスト(2)の計算例

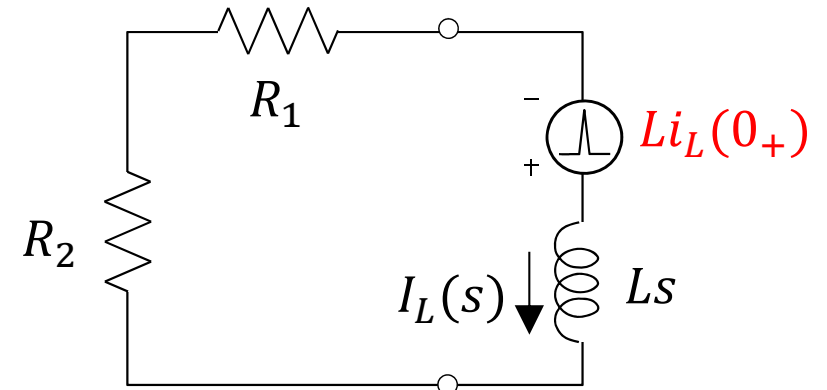


左図の回路においてスイッチSを閉じ、十分時間が経った定常状態を考える  
 $t = 0^+$ でスイッチを開けるとき、 $i_L(t)$ を求めよ

スイッチSを閉じたあとのs領域回路は

電源から見たインピーダンス  $Z(s) =$

$$I_L(s) = \frac{Li_L(0_+)}{Z(s)} = \frac{Li_L(0_+)}{R_1 + R_2 + Ls} = \frac{i_L(0_+)}{s + \frac{R_1 + R_2}{L}}$$



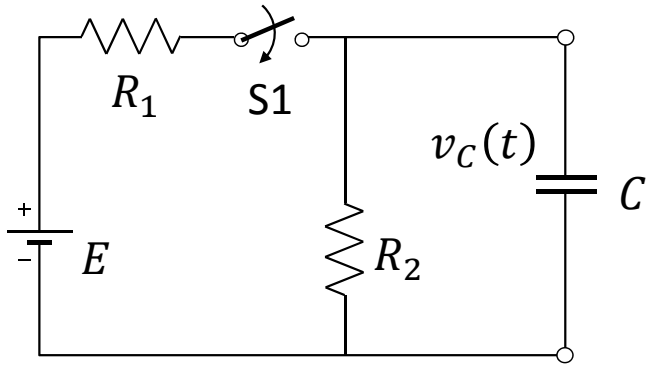
ラプラス変換により

$$i_L(t) = \mathcal{L}[I_L(s)] = i_L(0_+) \cdot \text{$$

$t = 0^+$ の定常状態でインダクタ電圧0なので  $i_L(0_+) = \frac{E}{R_1}$

$$i_L(t) = \frac{E}{R_1} \cdot \text{$$

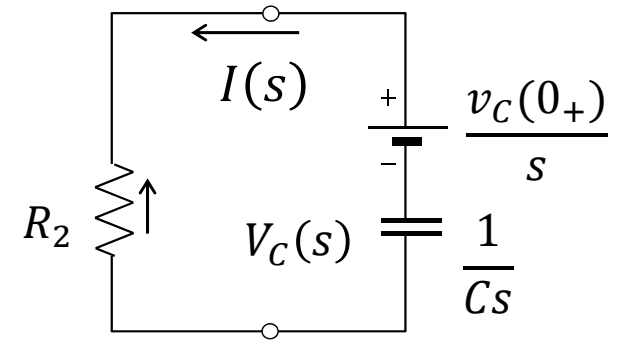
# 小テスト(3)の計算例



スイッチS1を閉じ、コンデンサを充電後、  
 $t=0$ でスイッチS1を開いた。  
 コンデンサ電圧 $v_C(t)$ の過渡応答を求めよ

スイッチS1を開いたあとのs領域回路は

電流  $I(s) = \frac{1}{Z(s)} \frac{v_C(0_+)}{s}$  ,  $Z(s) =$



$$V_R(s) = R_2 I(s) = R_2 \frac{v_C(0_+)}{sZ(s)} = \frac{v_C(0_+)}{s + \frac{1}{CR_2}} \quad \Rightarrow \quad v_R(t) = v_C(0_+) \quad \text{}$$

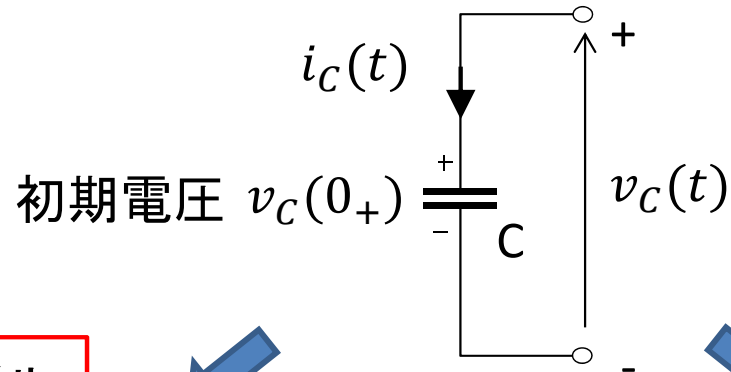
このとき、 $V_C(s)$  を分圧の関係から求めるとどうなるだろうか？

$$V_C(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{Z(s)} \frac{v_C(0_+)}{s} = \frac{1}{R_2Cs + 1} \frac{v_C(0_+)}{s} = \frac{v_C(0_+)}{CR_2s(s + \frac{1}{CR_2})} = v_C(0_+) \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{CR_2}} \right\}$$

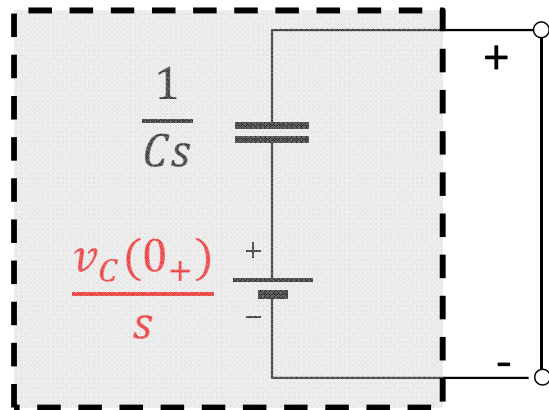
~~$v_C(t) = v_C(0_+) \{ 1 - e^{-\frac{1}{CR_2}t} \}$~~     物理的に正しいのは、 $v_C(t) = -v_R(t) =$

なぜこのようなことが起こるのだろうか？

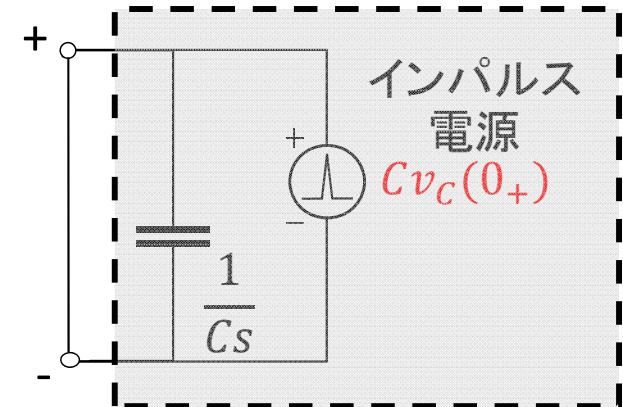
# s領域モデルの双対性



電圧源モデル



電流源モデル



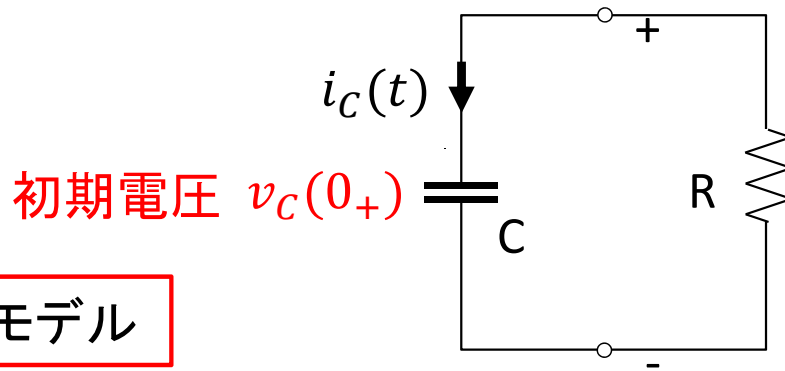
インピーダンス  $\frac{1}{Cs}$   
 短絡電流  $I_{short}(s)$   
 開放電圧  $V_{open}(s)$

$$I_{short}(s) = \frac{v_C(0_+)}{\frac{1}{Cs}} = Cv_C(0_+) = I_C(s) = I_{short}(s) = Cv_C(0_+)$$

$$V_{open}(s) = \frac{v_C(0_+)}{s} = V_C(s) = V_{open}(s) = \frac{1}{Cs} Cv_C(0_+) = \frac{v_C(0_+)}{s}$$

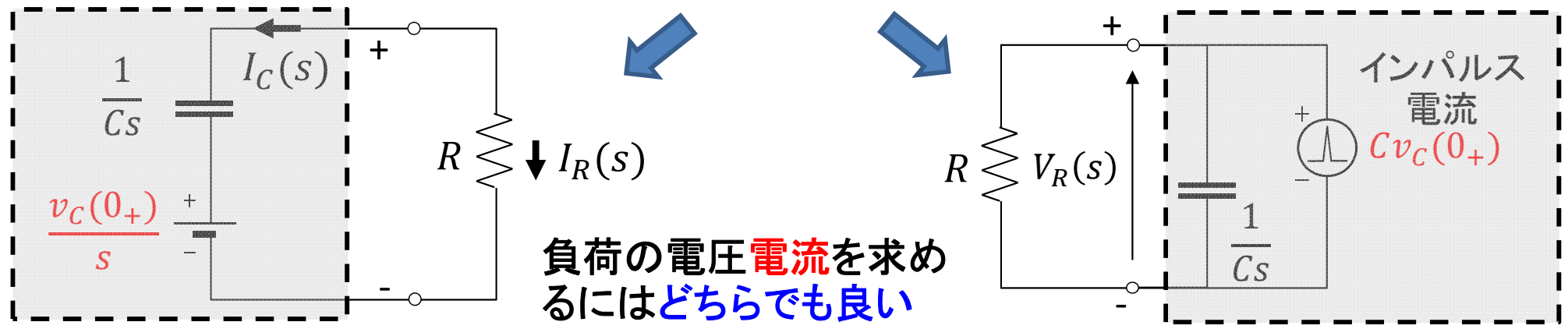
s領域に持っていくことで、電源が現れるが素子とは分離できない  
 等価回路モデル内部の素子の電圧電流はブラックボックス

# s領域モデルの注意点



電圧源モデル

電流源モデル



$$I_R(s) = \frac{\frac{v_C(0_+)}{s}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{v_C(0_+)}{R} \frac{1}{s + \frac{1}{CR}}$$

$$i_R(t) = \frac{v_C(0_+)}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = -i_C(t)$$

$$V_R(s) = \frac{R \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} C v_C(0_+) = \frac{v_C(0_+)}{s + \frac{1}{CR}}$$

$$v_R(t) = v_C(0_+) e^{-\frac{t}{RC}} = v_C(t)$$

素子に繋がった負荷側の電圧、電流は正しく求められるがモデル内部は

キャパシタ(インダクタ)電流を求め  
るには電圧源モデルの負荷電流

キャパシタ(インダクタ)電圧を求め  
るには電流源モデルの負荷電圧

# システムの伝達関数

# s領域のゼロ状態応答の解析

任意のRLC回路に入力電圧 $f(t)$ 、 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ が印加されたとき、そのs領域でのある応答 $Y(s)$ は、**ゼロ状態応答 $Y_1(s)$** とゼロ入力応答 $Y_2(s)$ との和で表される

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$$

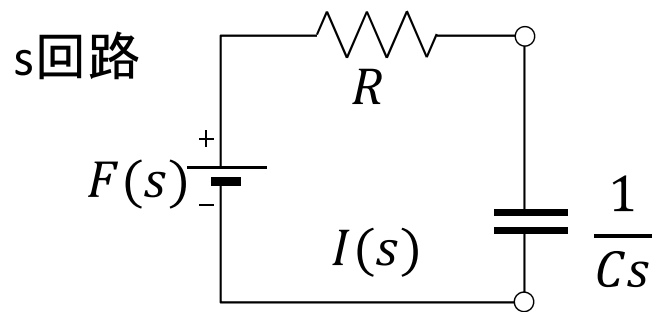
$Y_1(s)$ は初期値0、すなわち  のみに起因する応答を示す。

このとき(初期値0)、s領域において $Y_1(s)$ と入力 $F(s)$ の関係に、和や差の項は含まれず線形性より、 $Y_1(s)$ は回路の特性を表す $H(s)$ と入力 $F(s)$ の  として表される

$$Y_1(s) = H(s)F(s)$$

ここで、 $H(s)$ は回路固有の特性を示し、 と呼ばれる

例えば、初期値のないRC回路のs領域回路において、電源を $F(s)$ とすれば



コンデンサの電圧 $V_C(s)$

$$V_C(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} F(s)$$

抵抗電圧 $V_R(s)$

$$V_R(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{Cs}} F(s)$$

$H(s)$  伝達関数

# 伝達関数の一般表現

回路システムの入力 一般的には   $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$

回路システムの出力 回路内のある素子の   $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$

入力によって、どのような出力が得られるかは電気回路(システム)自体の性質による

システムの入出力信号  $f(t)$ 、 $y(t)$  の関係は、一般的に以下のような微分方程式で表現可

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f$$

初期値を無視してラプラス変換すれば、

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) F(s)$$

入出力の性質を数式的に表すには、

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

伝達関数  $G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$  (すべての動的素子の初期値が0の状態)

伝達関数は、線形システムでは一般に  で表現できる

# 伝達関数とインパルス応答

入力 $f(t)$ が単位インパルス関数 $\delta(t)$ のとき、出力 $y(t)$ を  と呼んだ

さらにそのラプラス変換は

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\delta(t)] = \input{type="text"}$$

この出力 $Y(s)$ は伝達関数 $H(s)$ を用いて

$$Y(s) = H(s)F(s) = H(s)$$

となり、伝達関数  $H(s)$  は  $s$  領域での  となる

したがって、インパルス応答は伝達関数の逆ラプラス変換として

$$\text{インパルス応答} : h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

すいかが甘いかどうかを食べないで調べる方法

あまい  $\rightarrow$  水分の多い  $\rightarrow$  たたくときの音がこもる (低い音)

出力 $y(t)$ を時間応答で表現する

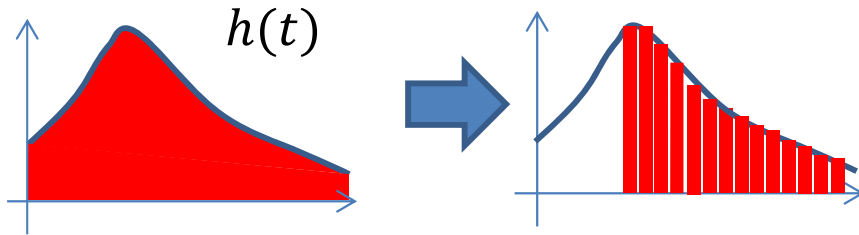
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)F(s)] = \int_0^t h(\zeta)f(t - \zeta) d\zeta = h(t) * f(t)$$

したがって、出力 $y(t)$ はインパルス応答 $h(t)$ と入力 $f(t)$ の  で表される。



# インパルス応答と遅延特性

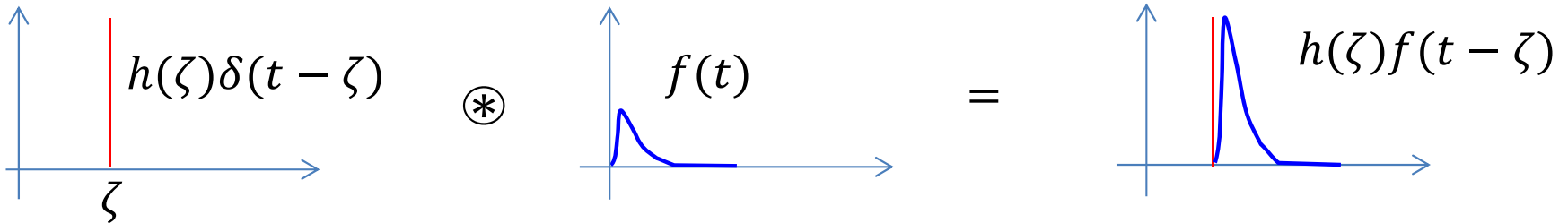
$h(t)$ との畳み込み演算は、被積分波形の   した波形を  に対して足す



$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \int_0^t h(\zeta)\delta(t - \zeta) d\zeta$$

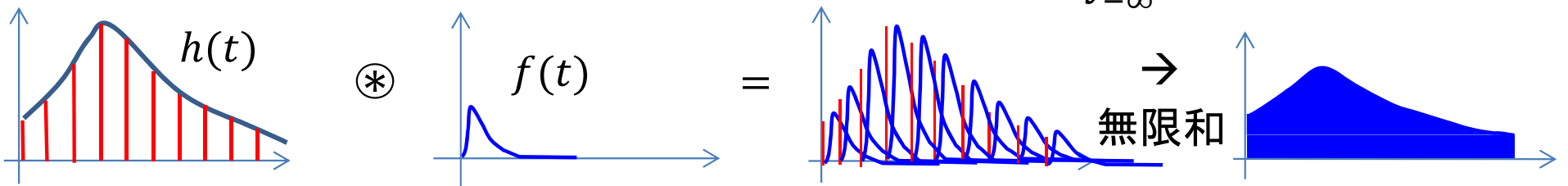
$h(t)$ は  $\zeta$  遅延したデルタ関数の無限和

$\zeta$ 遅延したデルタ関数との畳み込み積分



$h(t)$ は  $\zeta$ 遅延したデルタ関数の和なので

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta)f(t - \zeta) d\zeta$$



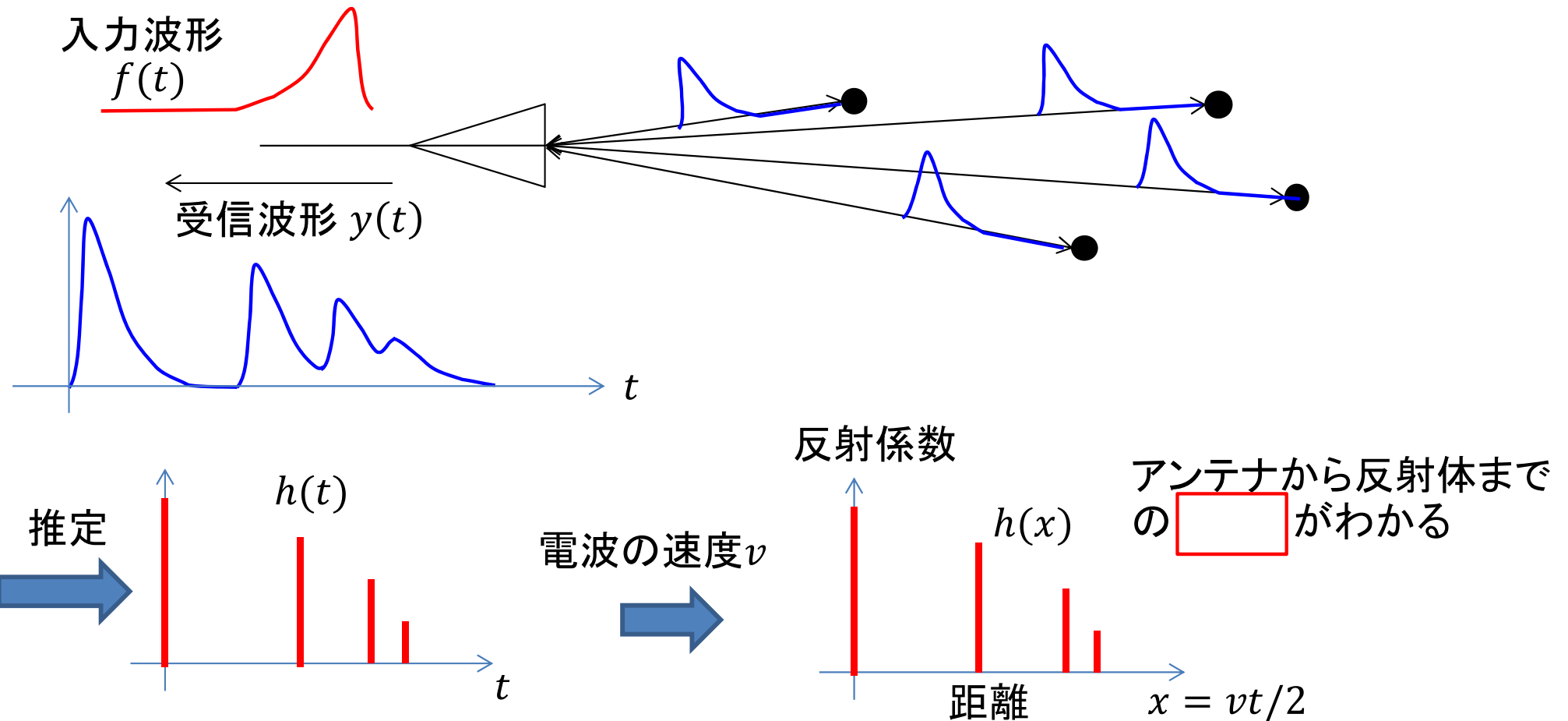
伝達関数による表現は入力波形の整数倍や和、差だけでなく、インパルス応答との畳み込み積分として、システムによる入力波形の  も表現できる

# インパルス応答とレーダ

波動応用計測の分野ではインパルス応答から未知の伝達関数  $h(t)$  を推定する

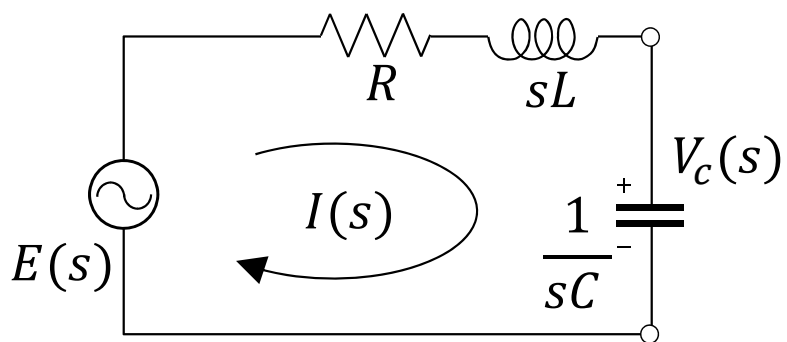


波の伝搬速度が一定のとき、遠くの物体からの  到達する



# 伝達関数とブロック線図

s領域での回路図



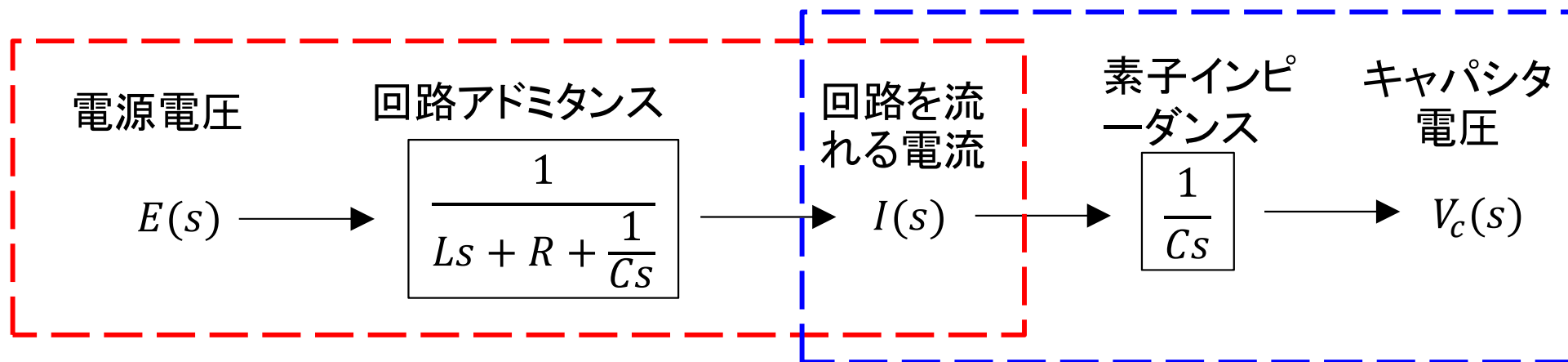
入力 → 電源  $E(s)$

出力 → コンデンサ端の電圧  $V_c(s)$

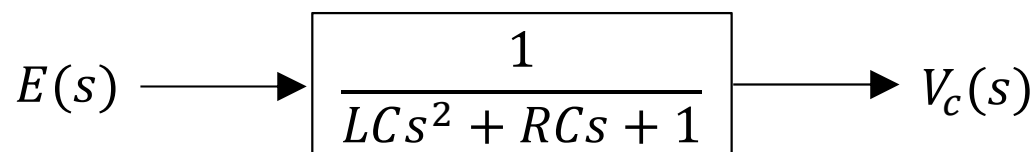
電源と回路電流の関係  $E(s) =$    $I(s)$

回路電流と  $V_c(s)$  の関係  $V_c(s) = \frac{I(s)}{}$

入力信号から出力信号までの信号の流れを物理的なパラメータで順番に示すと、



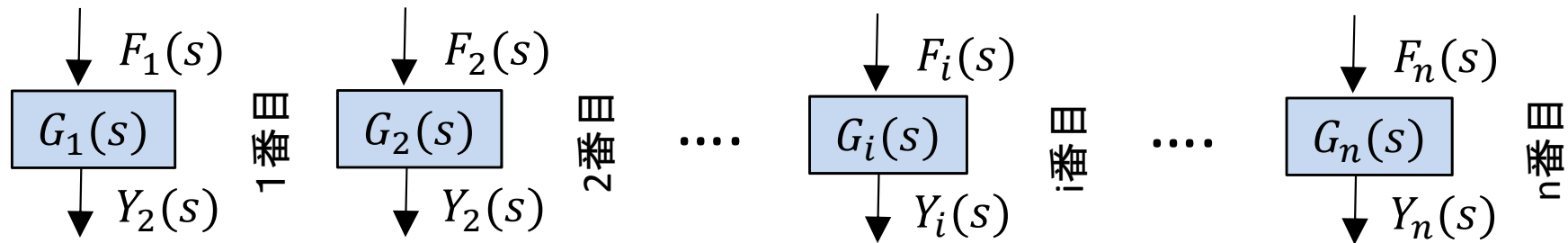
システム全体の伝達関数  $G(s)$



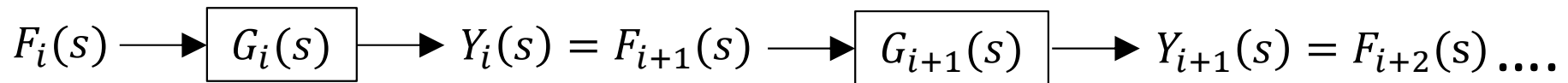
システムの入出力において信号の流れに着目して描かれた図を  と呼ぶ

# 伝達関数のカスケード接続

$G_i(s)$  で表される伝達関数を持つ  $n$  個のサブシステム ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を考える。



$i$  番目のシステムの出力が  となるように、  
論理的もしくは物理的に接続する



このような接続を  と呼ぶ

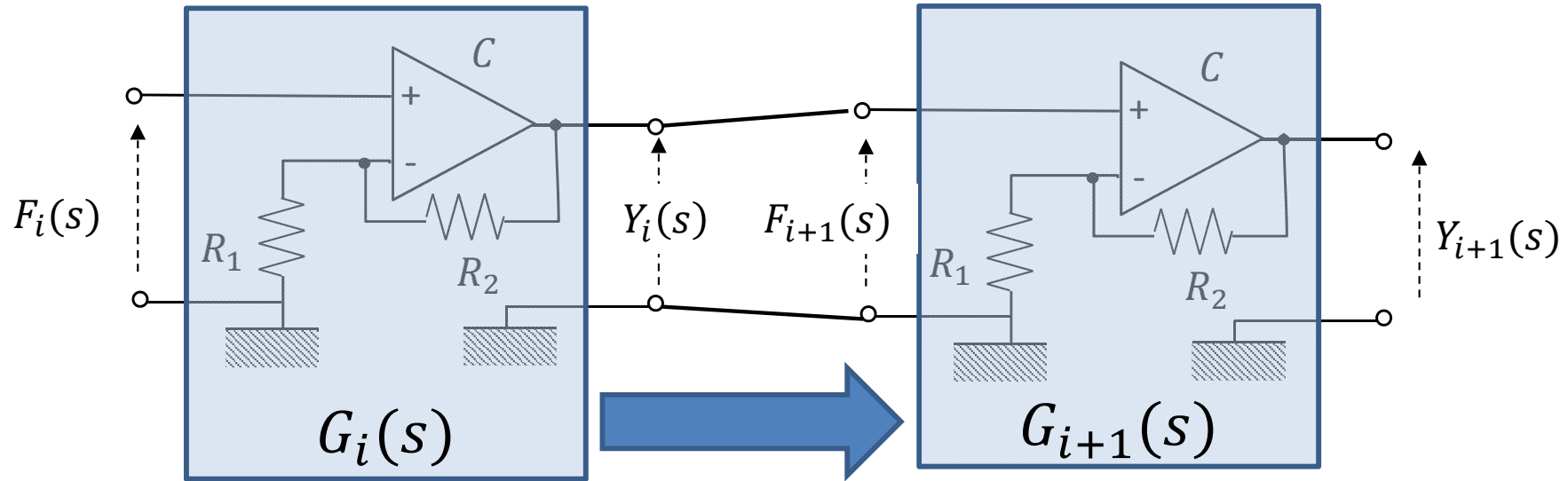
初段の入力  $F(s) = F_1(s)$  に対して、最終段の出力  $Y(s) = Y_n(s)$  の  
伝達関数  $G(s)$  は、  で表される

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot \dots \cdot G_n(s)$$

ただし、接続により  ことが必要、すなわち

# カスケード接続の注意点

$Y_i(s)$  は  $F_i(s)$  によって決定されるが、 $F_i(s)$  は  $Y_i(s)$  に影響されない



信号の流れが一方向的であること

電流が流れても出力電圧  
が変動しなければいい

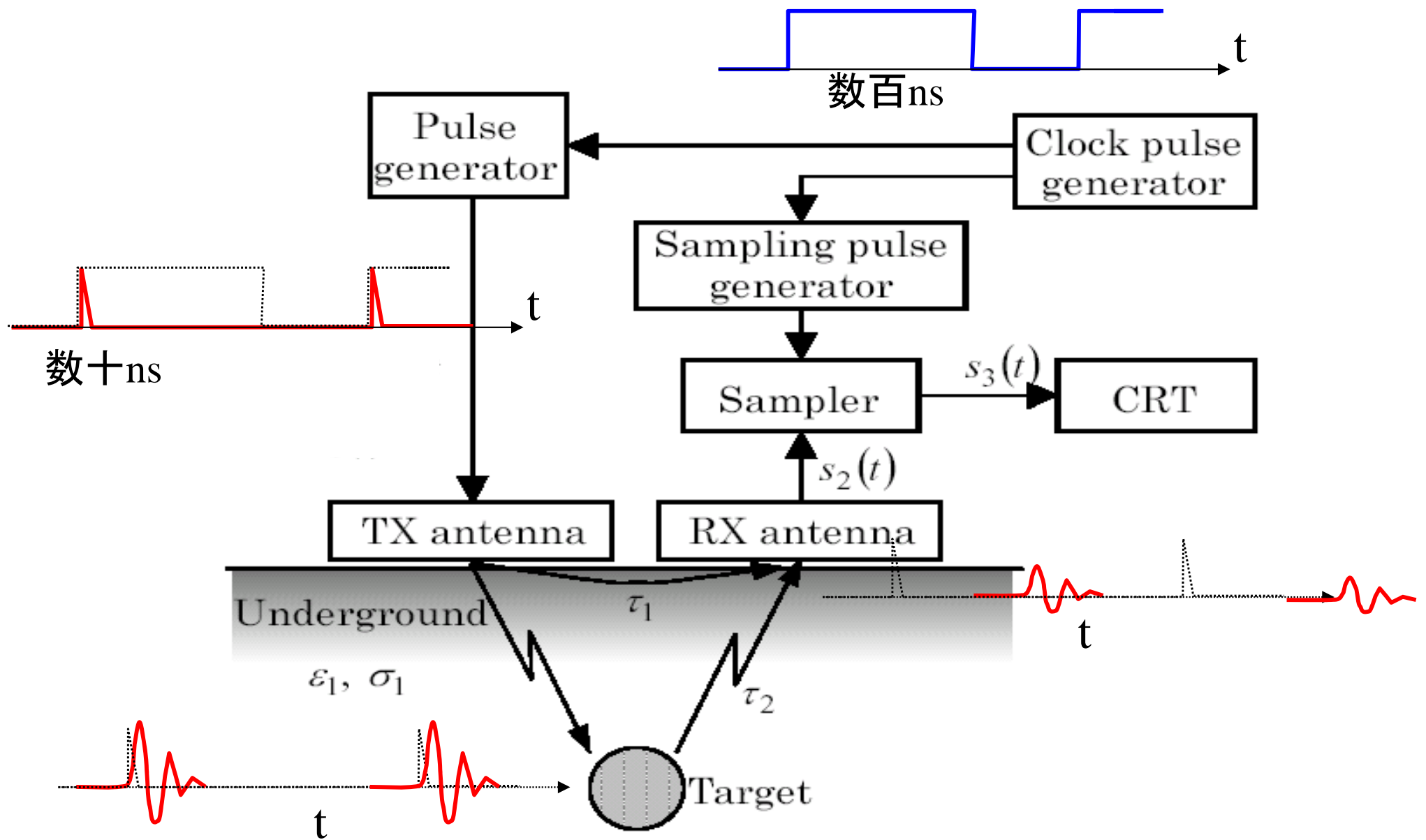
出力インピーダンス  $\ll$

接続によって電流が流れ  
込まなければいい

入力インピーダンス (低周波)

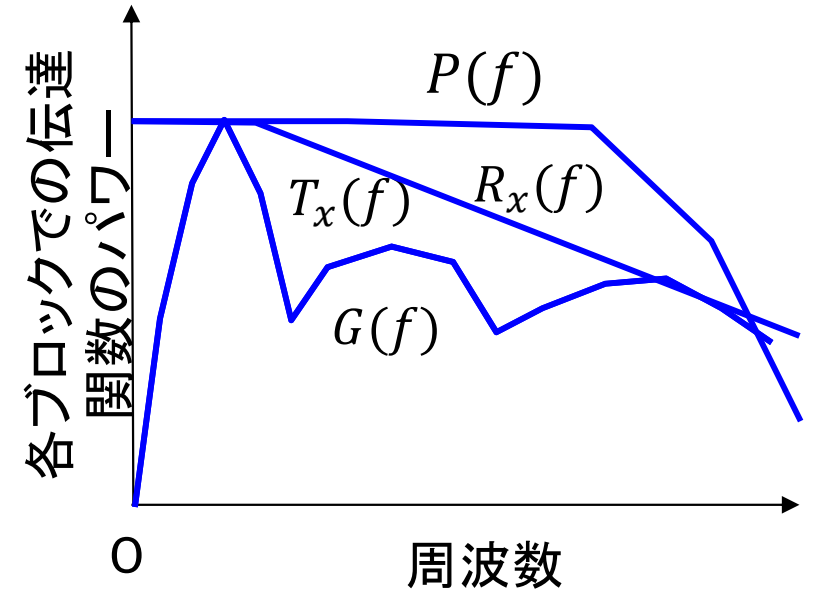
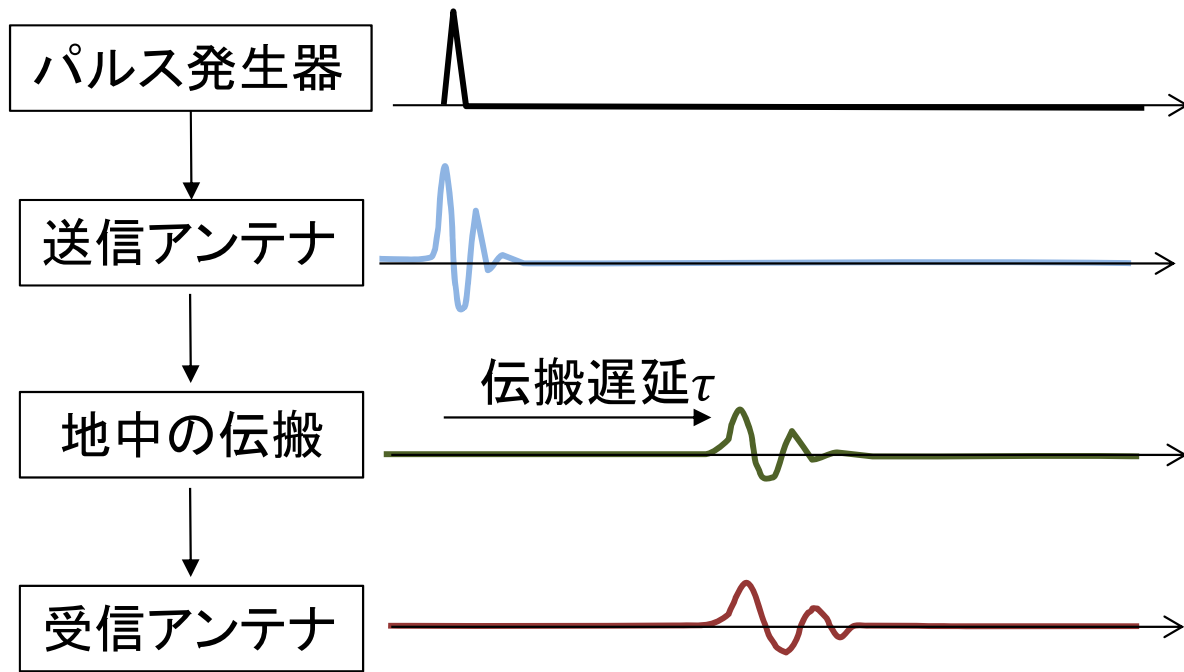
出力インピーダンス = 伝送線路の特性  
インピーダンス = 入力インピーダンス  
インピーダンス整合 (高周波)

# レーダシステムのブロック線図

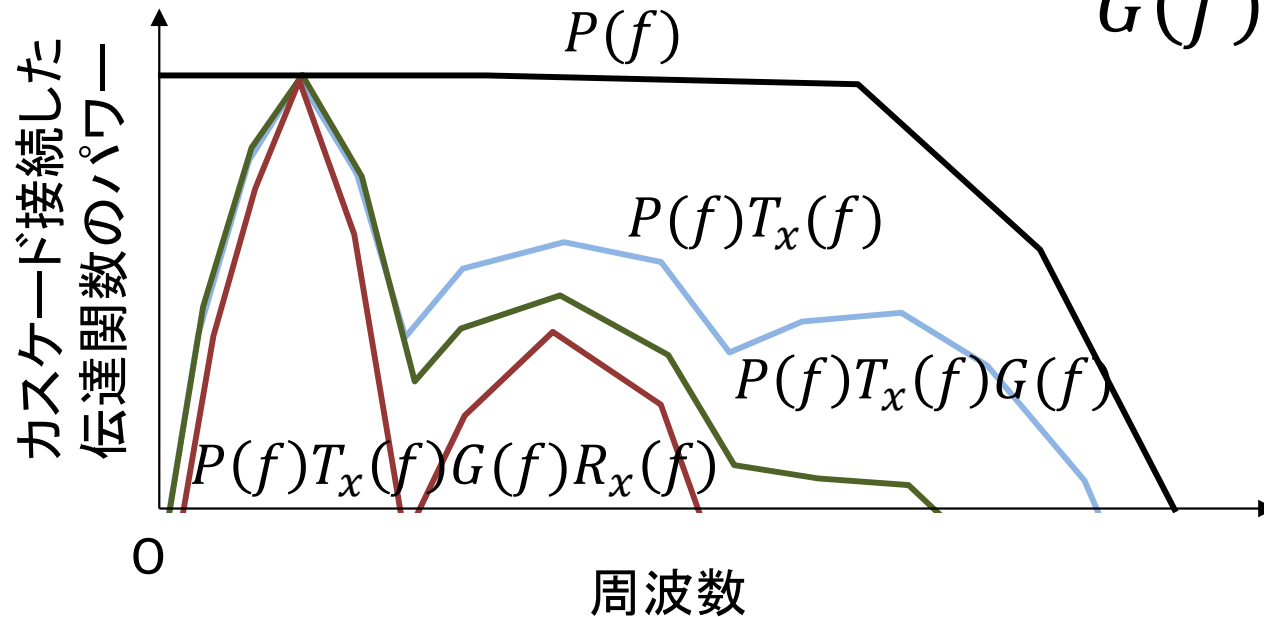


各ブロックの入出力インピーダンスは $50\Omega$ 、伝送線路の特性インピーダンスも $50\Omega$ 、  
高周波では電圧波形(電流波形)を伝送  
インピーダンス整合により、すべての電力が次のブロックで吸収される(反射しない)

# 地中レーダシステムの伝達関数



$$G(f) = |G(f)| e^{-j2\pi f\tau}$$



# フィードバック系の伝達関数



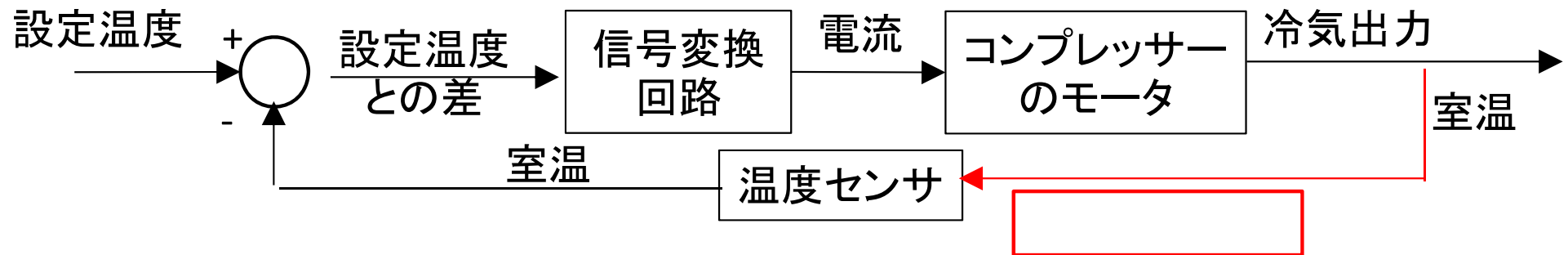
# 制御系のブロック線図

マニュアル制御 手動制御

体感温度 高 → 風量ダイヤル開ける  
体感温度 低 → 風量ダイヤル閉じる

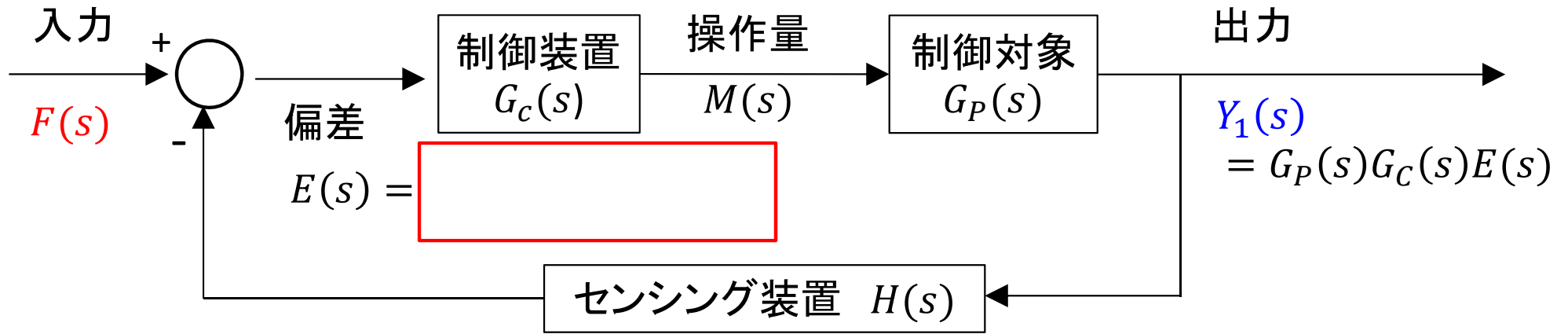


オートエアコン 設定温度になるよう室温を自動制御



フィードバック制御 システムの出力が設定値となるように、出力の一部を取り出して、  
[ ] の情報から出力を変化させる制御法

# フィードバック制御と伝達関数



$$\begin{cases} Y_1(s) = G_P(s)G_C(s)E(s) \\ E(s) = F(s) - H(s)Y_1(s) \end{cases}$$

$Y_1(s)$ を消去

$$E(s) = F(s) - H(s)G_P(s)G_C(s)E(s)$$

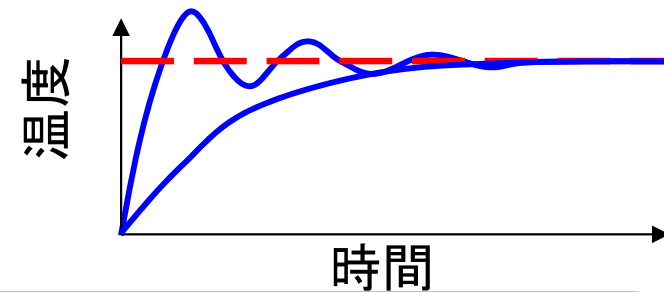
$E(s)$ を $F(s)$ で表すと、

$$(1 + H(s)G_P(s)G_C(s))E(s) = F(s)$$

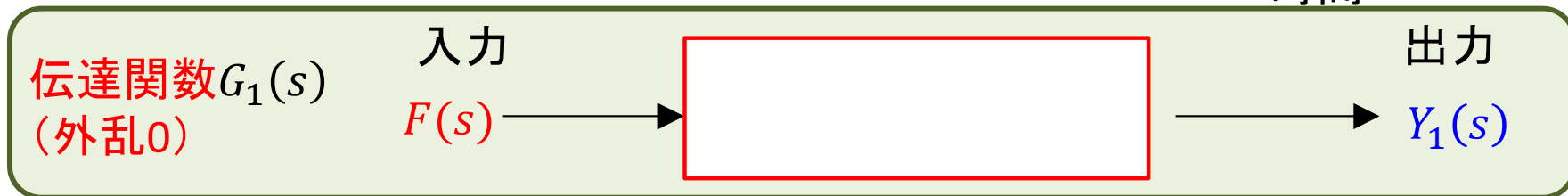
$$E(s) = F(s) \frac{1}{1 + H(s)G_P(s)G_C(s)}$$

$Y_1(s)$ を $F(s)$ で表すと、

$$Y_1(s) = \frac{G_P(s)G_C(s)}{1 + H(s)G_P(s)G_C(s)} F(s)$$



設定値と出力の間の伝達関数は

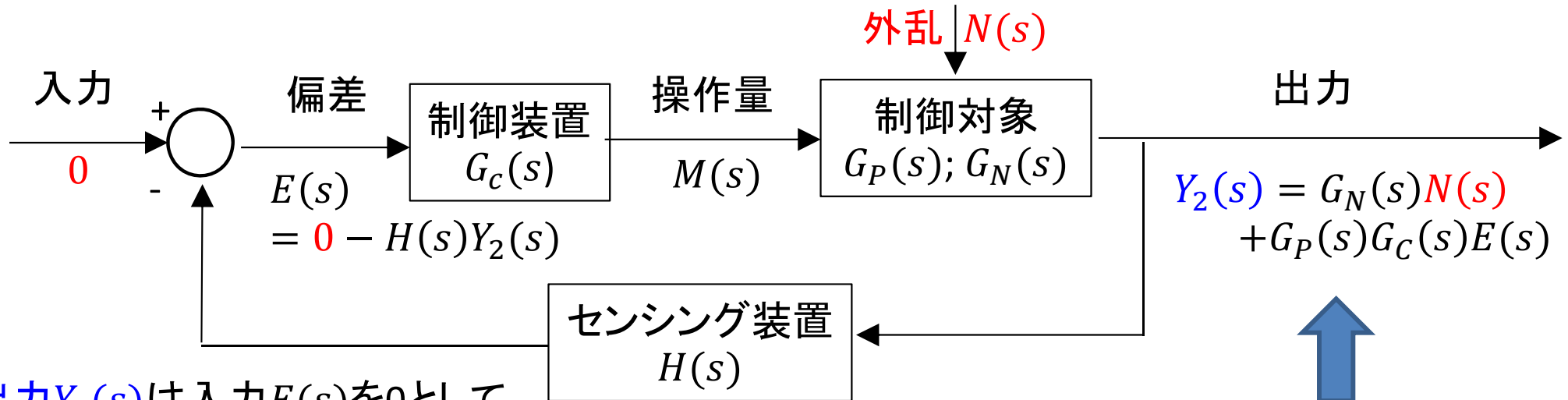


# 外乱の伝達関数

制御対象が操作量以外にも、ある外乱 $N(s)$ により影響を受けるとき

制御対象: 室内温度      操作量とコンプレッサー、外気温と断熱材の断熱特性

外乱の効果もフィードバックによりシステム全体に波及する。



出力 $Y_2(s)$ は入力 $F(s)$ を0として

$$\begin{cases} Y_2(s) = G_N(s)N(s) + G_P(s)G_C(s)E(s) \\ E(s) = 0 - H(s)Y_2(s) \end{cases}$$

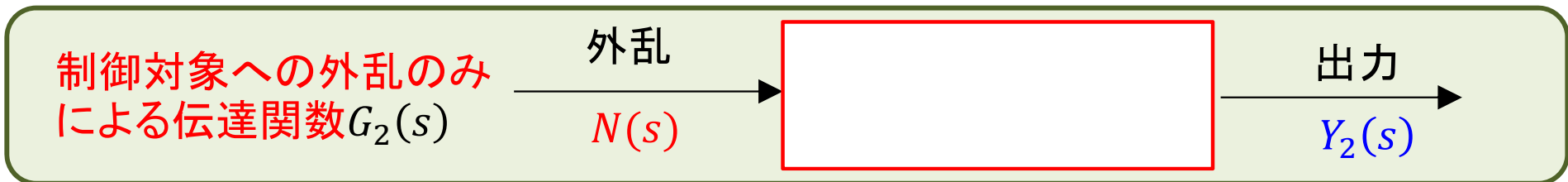
$E(s)$ を消去して

$$Y_2(s) = G_N(s)N(s) - G_P(s)G_C(s)H(s)Y_2(s)$$

$$\{1 + G_P(s)G_C(s)H(s)\}Y_2(s) = G_N(s)N(s)$$

外乱による応答と操作量による応答が独立(互いに影響与えない)なとき

外乱と操作量による  
                    が出力

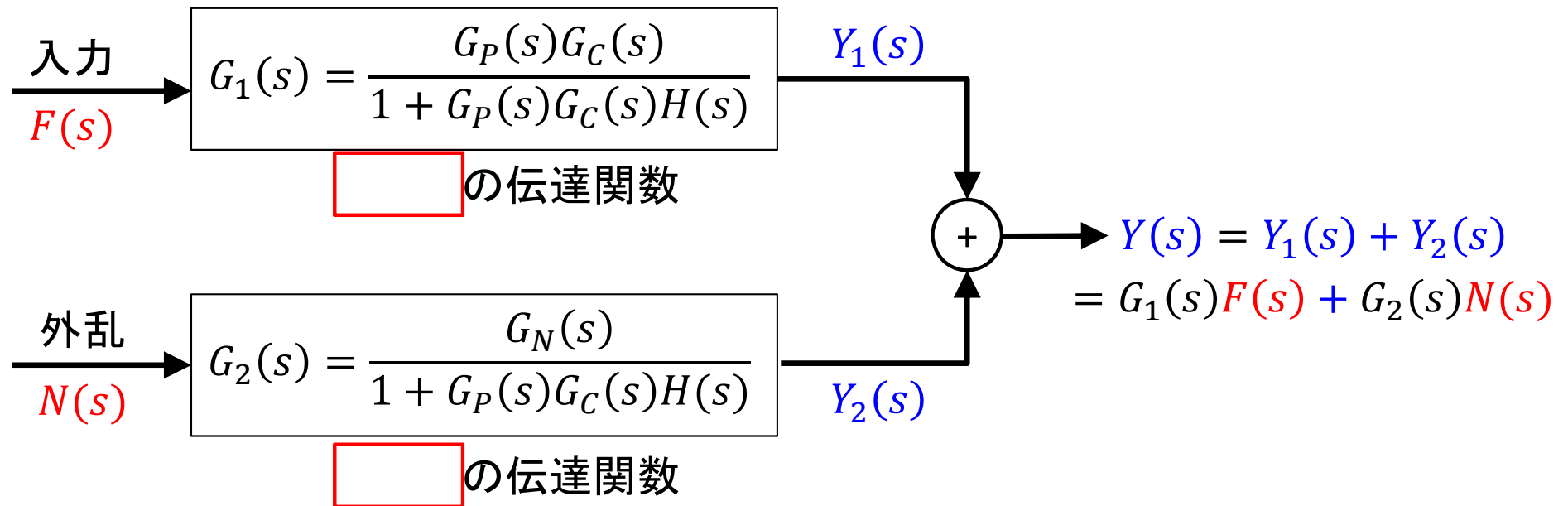


# 多入力の伝達関数

現実のモデルとして、入力を $f(t), n(t)$ の2種類考えると、その出力は

$$y(t) = \boxed{\phantom{G_1(s)f(t) + G_2(s)n(t)}}$$

より、2入力1出力のシステムも表すこともできる。(電気回路の重ね合わせの理)



一般に $G_C(s)$ 、 $G_P(s)$ 、 $H(s)$ は信号の微分や積分も含まれ、時間領域では微分方程式を構成する

ブロック線図を見れば、入力から出力までの信号の流れがよくわかり、システムを記述する方程式を容易に構築できる

# システム方程式

# 1入力1出力の線形1次系システムの伝達関数

入力を  $f(t)$  出力を  $y(t)$  とする線形1次システムの伝達関数を  $G(s)$  とする

s領域では  $F(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$

時間領域では 1階の微分方程式

線形システムの入出力信号  $f(t)$ 、 $y(t)$  の関係は、以下のような微分方程式で表現可

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f$$

線形1次システムの場合 ( $m \leq n$ )  $a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = b_1 \frac{d}{dt} f(t) + b_0 f(t)$

ラプラス変換すると(初期値は0)  $(a_1 s + a_0) Y(s) = (b_1 s + b_0) F(s)$

伝達関数  $G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0}$

# 1入力1出力の線形1次系システム方程式

線形1次システム  $a_1 \frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) + a_0 \mathbf{y}(t) = b_1 \frac{d}{dt} f(t) + b_0 f(t)$

$f(t)$ 、 $y(t)$ の関係を定める方程式に新しい変数  $x(t)$   を導入する

{	$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bf(t) \quad (1)$	<input type="text"/>	(状態変数がシステムや入力によりどのように変化するか記述した式)
	$y(t) = cx(t) + df(t) \quad (2)$	<input type="text"/>	(出力が状態変数や入力によりどう変化するか記述した式)

この方程式は1入力1出力の線形1次系システム方程式という

(2)式の微分  $\frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) = c \frac{d}{dt} x(t) + d \frac{d}{dt} f(t)$

(1)式を代入  $\frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) = acx(t) + bcf(t) + d \frac{d}{dt} f(t)$

$x(t)$ を消去  $\frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) = a\mathbf{y}(t) - adf(t) + bcf(t) + d \frac{d}{dt} f(t)$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) - a\mathbf{y}(t) = d \frac{d}{dt} f(t) - (ad - bc)f(t)$$

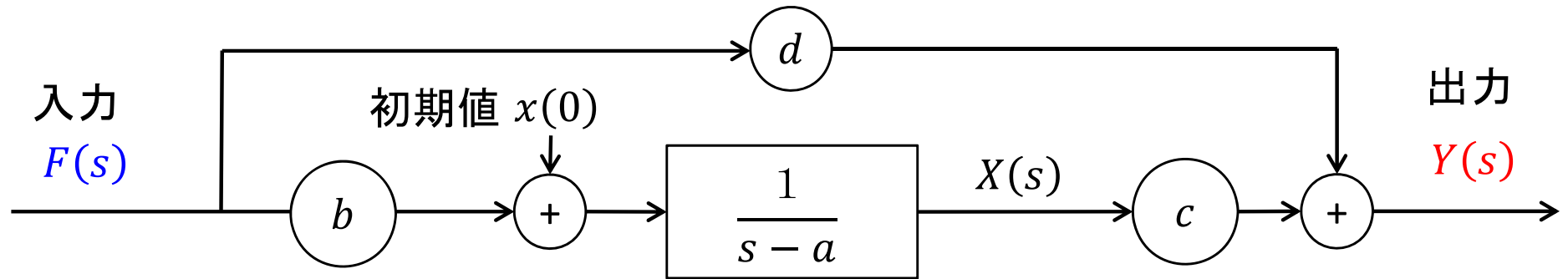


$y(t), f(t)$ に関する   
定係数微分方程式を表現

# 1次系システムの伝達関数

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bf(t) \\ y(t) = cx(t) + df(t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{システム方程式} \\ \text{をラプラス変換、} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} sX(s) - x(0) = aX(s) + bF(s) \\ Y(s) = cX(s) + dF(s) \end{array} \right.$$

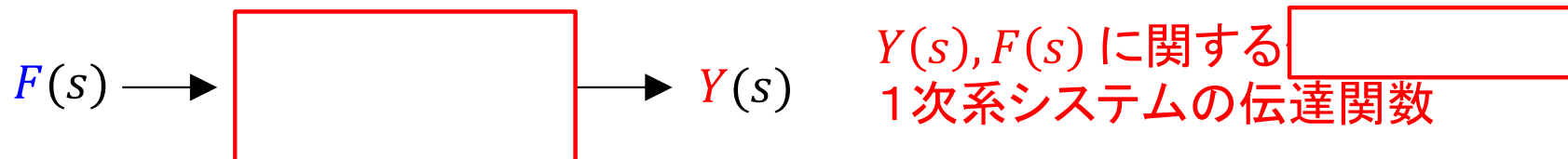
$$\left\{ \begin{array}{l} (s - a)X(s) = x(0) + bF(s) \\ Y(s) = cX(s) + dF(s) \end{array} \right.$$



伝達関数を考える際は初期値を0として考えるため  $x(0) = 0$

状態変数  $X(s)$  は  $X(s) =$

伝達関数  $G(s)$  は  $G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{cX(s) + dF(s)}{F(s)} =$





# 状態方程式のベクトル表現

RLC回路の例では二階微分方程式が表れるが、その正規形について考える

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a_0x(t) + a_1\frac{dx(t)}{dt} + bf(t)$$

ここで、新たに状態変数 $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ を導入する。(2階の微分方程式なので2個の状態変数)

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt}$$

**状態方程式**  
各状態変数の微分を  
各状態変数と各入力の線形結合で表す

これにより、二階微分方程式は1階の連立微分方程式として表せる

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = a_0x_1(t) + a_1x_2 + bf(t) \end{cases} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{ベクトル表現} \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} f(t) \end{array} \right.$$

状態変数 $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ と入力 $f(t)$ との動的関係を表しており、と呼ぶ

状態変数が複数あるため右式のように、できる

n次の微分方程式はn階の連立微分方程式になるため、となる

# 出力方程式のベクトル表現

また、我々が線形なシステムの解析において注目する関数すなわち、システムの入力関数 $x(t)$ を例え、 $x(t)$ とすると、

**出力方程式** → 各出力を各状態変数と各入力の線形結合で表す

$$y_1(t) = x(t)$$

状態変数を用いて表すと、

$$y_1(t) = x(t) = x_1(t)$$

着目する出力は何個でも制限はないので、

$$y_2(t) = x_2(t) + x_1(t)$$

$$y_3(t) = x_2(t) + f(t)$$

⋮

このように、入力や複数の状態変数と、複数の出力を結び付ける式を**出力方程式**と呼び、一般にベクトル表記する。

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} f(t)$$

一般に状態方程式と出力方程式を合わせて  と呼ぶ

このような表記をする理由は

システムの持つ  を説明するのに有利な場合があるため

状態変数がある物理量にとれば、 の物理的アプローチも容易になる

各種の物理条件により受ける  が与えられた複雑なシステムにも対応しやすい

# システム方程式の一般表現

$x_i(t)$  をシステムの状態変数、 $f_j(t)$  をシステムへの  とすると

一般に、 $r$  個の入力を持つ  $n$  次系のシステムは、

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = g_i(x_1(t), \dots, x_i(t), \dots, x_n(t), f_1(t), \dots, f_j(t), \dots, f_r(t), t) \quad \begin{array}{l} (i = 1, \dots, n) \\ (j = 1, \dots, r) \end{array}$$

$n$ 個の1階の連立微分方程式をシステム理論では  という

一般的なベクトル表現

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{f}(t), t)$$

右辺が時間  $t$  を陽に含まない  
オートノマス系

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{f}(t))$$

システムの性質が時間軸の移動に対して不変

はオートノマス系

入力を含まない 自由系

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$$

電源のない、電気回路等

# 線形時不変システム方程式

一般に、 $r$  個の入力を持つ線形時不変  $n$  次系のシステムの状態方程式は、

線形・時不変システム  $\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \boxed{\phantom{\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(t)}}$

状態ベクトル  $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$       入力ベクトル  $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_r(t) \end{pmatrix}$

システム係数行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$       駆動行列  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix}$

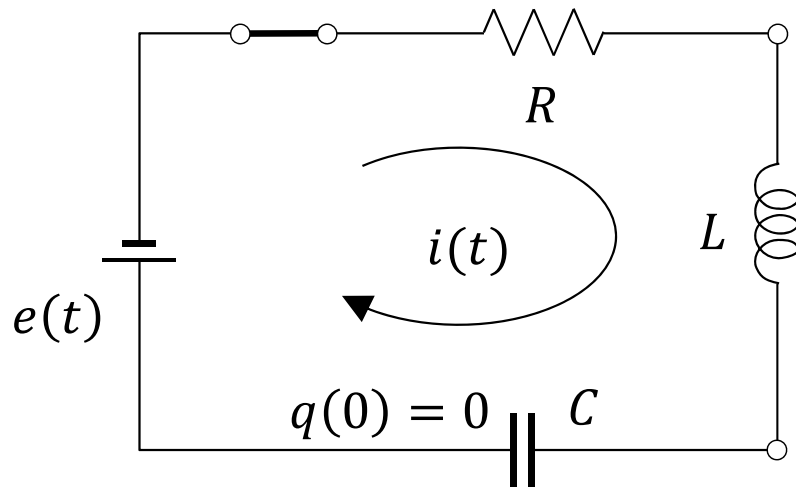
一般に  $m$  個の出力を持つ出力方程式は

線形・時不変システム  $\mathbf{y}(t) = \boxed{\phantom{\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{f}(t)}}$

出力ベクトル  $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}$

出力行列  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$       伝達行列  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mr} \end{pmatrix}$

# RLC直列回路のシステム方程式



$e(t)$ を電源とするRLC直列回路において、出力を $i(t)$ とする。微分方程式は以下となる

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = e(t)$$

変形すると

$$L \frac{di(t)}{dt} = -Ri(t) - \frac{1}{C} q(t) + e(t)$$

$\frac{d}{dt} q(t) = i(t)$  より、状態ベクトルを  $x(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ i(t) \end{pmatrix}$  とすれば  $\frac{d}{dt} x(t)$  を  $x(t)$  で表せる

入力ベクトルを  $f(t) = e(t)$  とすると、

状態方程式は  $\frac{d}{dt} x(t) = \boxed{\phantom{A}} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} f(t)$

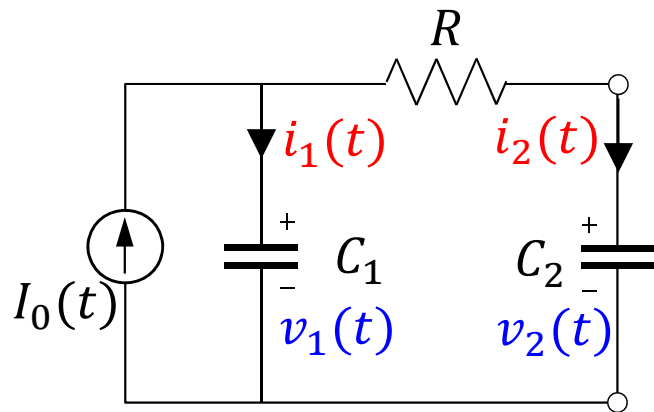
出力方程式は  $y(t) = i(t)$

システム係数行列	駆動行列	出力行列	伝達行列
$A = \frac{-1}{LC} \begin{pmatrix} 0 & -LC \\ 1 & RC \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$C = (0 \quad 1)$	$D = (0)$

# システム方程式の立て方

# システム方程式の状態ベクトルの取り方

状態変数はシステム内部の様子を表すパラメータで取り方は様々



左のような回路を考える

キルヒホッフの電流則から

$$I_0(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad \text{----- ①}$$

キルヒホッフの電圧則から

$$i_2(t)R + v_2(t) = v_1(t) \quad \text{----- ②}$$

未知数4つで、式二つ

キャパシタ1の電荷を $Q(t)$ とすれば、

$Q(t) = C_1 v_1(t)$ より、両辺を微分すれば

$$\frac{d}{dt}Q(t) = C_1 \frac{d}{dt}v_1(t) = i_1(t) \quad \text{----- ③}$$

同様に

$$C_2 \frac{d}{dt}v_2(t) = i_2(t) \quad \text{----- ④}$$

状態変数を  $x(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$

とし、状態方程式を立てる

$x(t)$ の微分を $x(t)$ と入力で表すため、 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ を $v_1(t)$ 、 $v_2(t)$ で表すことを考える

# システム方程式の状態ベクトルの取り方

①、②式から $i_2(t)$ を消去

$$(I_0(t) - i_1(t))R + v_2(t) = v_1(t)$$

$$i_1(t) = -\frac{v_1(t)}{R} + \frac{v_2(t)}{R} + I_0(t)$$

③式より、

$$C_1 \frac{d}{dt} v_1(t) = -\frac{v_1(t)}{R} + \frac{v_2(t)}{R} + I_0(t)$$

①式より、 $i_2(t) = I_0(t) - i_1(t)$

$$i_2(t) = \frac{v_1(t)}{R} - \frac{v_2(t)}{R}$$

$$C_2 \frac{d}{dt} v_2(t) = \frac{v_1(t)}{R} - \frac{v_2(t)}{R}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} v_1(t) \\ \frac{d}{dt} v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v_1(t)}{RC_1} + \frac{v_2(t)}{RC_1} + \frac{I_0(t)}{C_1} \\ \frac{v_1(t)}{RC_2} - \frac{v_2(t)}{RC_2} \end{pmatrix}$$

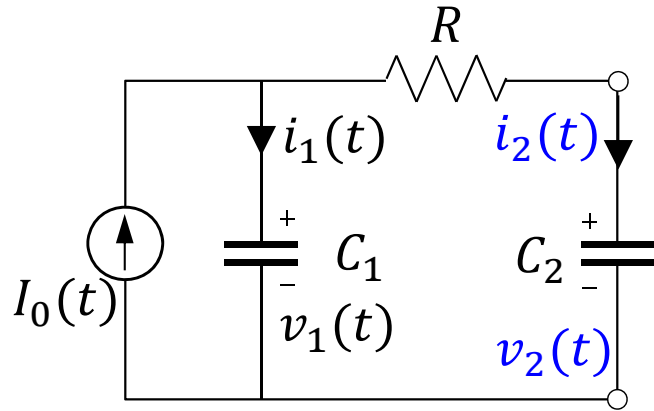
$$= \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{pmatrix} I_0(t)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \boxed{\quad} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{pmatrix} I_0(t)$$

この取り方は複雑



# システム方程式の状態ベクトルの取り方



状態変数を  $z(t) = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix}$  とした場合

状態変数  $z(t)$  の微分を状態変数  $z(t)$  で表す。

$$i_2(t) = C_2 \frac{d}{dt} v_2(t) \quad \text{より} \quad \frac{d}{dt} v_2(t) = \frac{1}{C_2} i_2(t)$$

$v_2(t)$  の微分はすでに  $z(t)$  で表せる

残りの  $i_2(t)$  の微分を  $z(t)$  で表すことを考える

電圧則から  $i_2(t)R + v_2(t) = v_1(t)$

両辺を微分すると

$$\frac{d}{dt} i_2(t)R + \frac{d}{dt} v_2(t) = \frac{d}{dt} v_1(t)$$

$$i_1(t) = C_1 \frac{d}{dt} v_1(t) \quad \text{より}$$

$$\frac{d}{dt} i_2(t)R + \frac{d}{dt} v_2(t) = \frac{1}{C_1} i_1(t)$$

電流則から  $I_0(t) = i_1(t) + i_2(t)$

$$\frac{d}{dt} i_2(t)R + \frac{1}{C_2} i_2(t) = \frac{1}{C_1} (I_0(t) - i_2(t))$$

$$\frac{d}{dt} i_2(t) = -\left(\frac{1}{RC_2} + \frac{1}{RC_1}\right) i_2(t) + \frac{I_0(t)}{RC_1}$$

$\frac{d}{dt} z(t) =$		$z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_1 R} \end{pmatrix} I_0(t)$
<b>簡単</b>		

状態変数の取り方で、システム方程式を構成する行列の簡潔さが異なる

# 状態ベクトルの変換

ここで、 $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$   $\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix}$  から、両者を結び付ける関係として

$\mathbf{x}(t) = \boxed{\quad} \mathbf{z}(t)$  が得られる。 $\mathbf{x}(t)$ に関する状態方程式に代入すると

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 & R \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{z}(t) = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & R \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{z}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{pmatrix} I_0(t)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{pmatrix} \mathbf{z}(t) + \begin{pmatrix} 1 & R \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{pmatrix} I_0(t)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & R \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 & R \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{より}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{RC_1} - \frac{1}{RC_2} \end{pmatrix} \mathbf{z}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_1 R} \end{pmatrix} I_0(t)$$

となり、 $\mathbf{z}(t)$ に関する状態方程式と一致する

システムが同一であれば、状態変数の取り方によらず、

であり、状態変数の選択には

方がよい

# システム方程式の解

# s領域でのシステム方程式

線形・時不変系のシステム方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) & \text{状態方程式} \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) & \text{出力方程式} \end{cases} \quad \text{状態ベクトル } \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

システム方程式を「解く」とは、ベクトル微分方程式である  を求め、出力方程式に代入し、 こと

状態ベクトル  $\mathbf{x}(t)$  の  
ラプラス変換は

$$\mathcal{L}[\mathbf{x}(t)] = \begin{pmatrix} \mathcal{L}[x_1(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[x_n(t)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{pmatrix} = \mathbf{X}(s)$$

状態ベクトル  $\mathbf{x}(t)$  の **微分** の  
ラプラス変換は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} sX_1(s) - x_1(0) \\ \vdots \\ sX_n(s) - x_n(0) \end{pmatrix} \\ &= s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

状態方程式のラプラス変換は

$$\begin{cases} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \end{cases}$$

s領域での状態方程式  
s領域での出力方程式

# システム方程式の解法のながれ

システム係数行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$       駆動行列  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix}$

初期値ベクトル  $\mathbf{x}(0)$

$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$       **s領域での状態方程式**

s領域での状態ベクトル  $\mathbf{X}(s)$       s領域での入力ベクトル  $\mathbf{U}(s) = \begin{pmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_r(s) \end{pmatrix}$

状態方程式から、 $\mathbf{I}$ を単位行列、 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ とすると

$$s\mathbf{I}\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\boxed{\phantom{\mathbf{I}}}\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ が存在するとき、両辺に左から $\Phi(s)$ を掛けると

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s)\{\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)\}$$

逆ラプラス変換により、状態ベクトルは

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)\{\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)\}] \quad \leftarrow \text{この求め方が重要}$$

出力ベクトルは

$$\mathbf{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{C}\Phi(s)\{\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)\} + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)] = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

# 状態ベクトルの解

逆行列  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$  が存在するとき、

$\Phi(s)$  : 状態ベクトルの  s領域のゼロ入力応答を結び付ける行列  
 $B$  : 入力と状態ベクトルを結び付ける行列  
 $U(s)$  : s領域の入力ベクトル(電圧源、電流源...)

状態ベクトルの解  $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)x_0] + \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)BU(s)]$

$U(s) = 0$  のときの解、すなわち、入力のない  を表す

$x_0 = 0$  のときの解、すなわち、初期値のない  を表す

**完全解 = ゼロ入力応答 + ゼロ状態応答**

$\Phi(s)$  の逆ラプラス変換を  $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)]$  とすれば、

ゼロ入力応答は  $\mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)x_0] = \phi(t)x_0$

$\phi(t)$ : 入力ベクトルを状態ベクトルに変換する行列で  と呼ぶ

ベクトル  $BU(s)$  は状態ベクトル  $x(t)$  と同単位系 s領域でのゼロ状態応答はベクトル  $BU(s)$  と  $\Phi(s)$  との積で表されている。

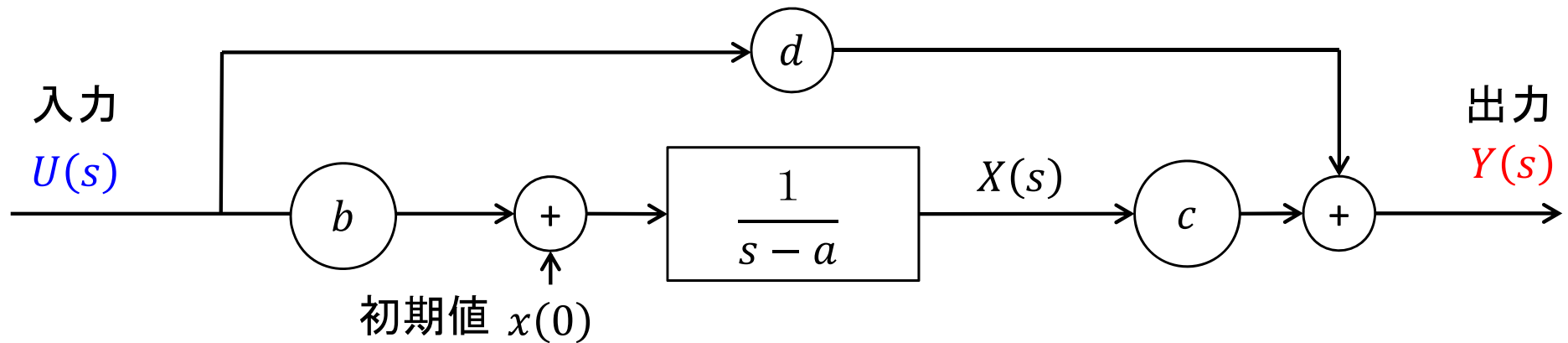
ゼロ状態応答は行列  $\phi(t)$  とベクトル  $Bu(t)$  の  の線形和

$$\mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)BU(s)] = \phi(t) \otimes Bu(t)$$

状態ベクトルの解はこれらの s の多項式を要素に持つベクトル、行列の逆ラプラス変換を計算することが全て

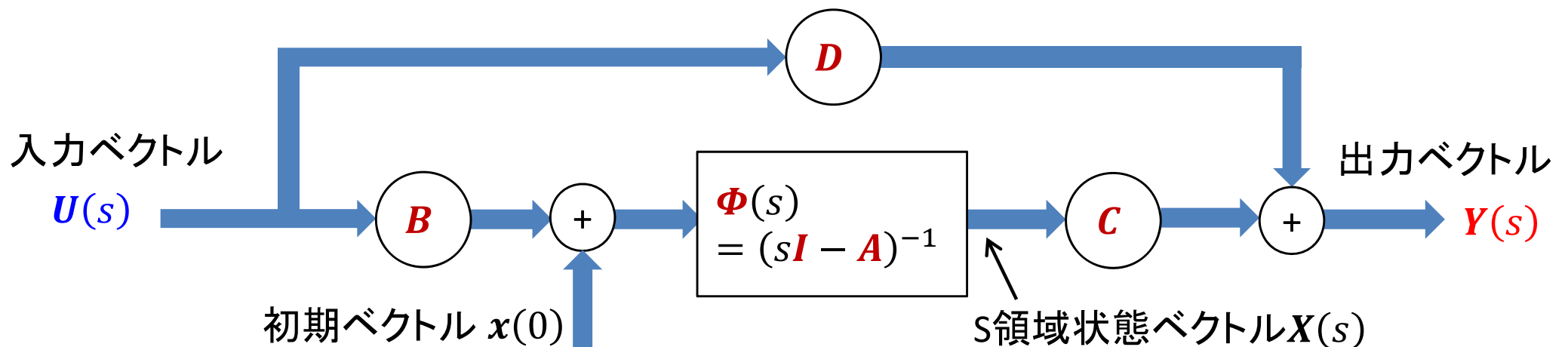
# ベクトルブロック線図

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s) \\ Y(s) = cX(s) + dU(s) \end{cases}$$



ベクトルシステム方程式は  
スカラーの時と同じ形

$$\begin{cases} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \end{cases}$$



# マトリクス伝達関数

スカラーシステム方程式では、初期値が0の時の、 $s$  領域での出力 $Y(s)$ と入力 $U(s)$ の比が伝達関数 $G(s)$ であった、

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad \text{伝達関数}G(s)\text{は } G(s) = \frac{cb}{s-a} + d$$

ベクトル状態方程式

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$x(0) = 0 \text{として}$$

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

ベクトル出力方程式

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$= C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

$$= \{C(sI - A)^{-1}B + D\}U(s)$$



$$Y(s) = G(s)U(s)$$

ベクトルシステム方程式では入出力の関係を右のように行列の積で定義できる

入力ベクトル

$$U(s)$$



$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$



$$Y(s)$$

出力ベクトル

$G(s)$ は(出力ベクトルの次元) × (入力ベクトルの次元)の行列であり、

と呼ぶ



# マトリクス伝達関数

1入力1出力のシステム

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

スカラー伝達関数  $U(s) \xrightarrow{G(s)} Y(s)$

$r$ 入力 $m$ 出力のシステム

$$Y(s) = \{C(sI - A)^{-1}B + D\}U(s)$$

入力ベクトル

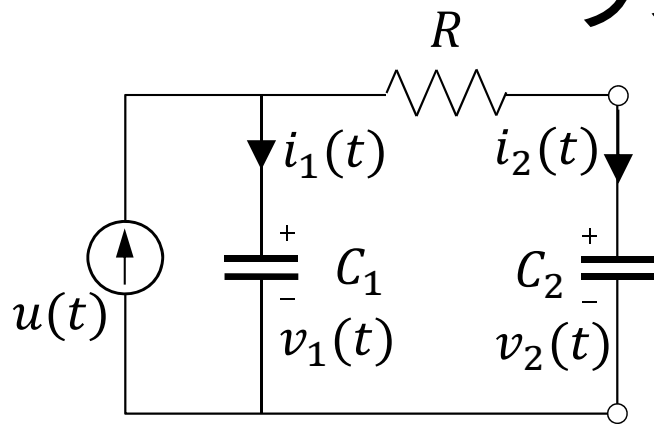
出力ベクトル

$$\begin{array}{l} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_r(s) \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \boxed{G(s)} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s) + \dots + G_{1r}(s)U_r(s) \\ Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s) + \dots + G_{2r}(s)U_r(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) = G_{m1}(s)U_1(s) + G_{m2}(s)U_2(s) + \dots + G_{mr}(s)U_r(s) \end{array}$$

出力は、入力と $s$ の関数で表される係数との線形和

# ラプラス変換によるシステム 方程式の解法例

# ラプラス変換による解法例



左の回路においてキャパシタ電流 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ を求める。  
 $u(t) = 2\delta(t)$ 、 $C_1=1[\text{F}]$ 、 $C_2=2[\text{F}]$ 、 $R=1/2[\Omega]$   
 キャパシタ1、2の初期電圧を0、1[V]

## Step1 状態ベクトルの決定

キャパシタ1, 2の端子間電圧 $v_1(t)$ 、 $v_2(t)$ を状態ベクトルとする

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$$

## Step2 状態方程式(状態ベクトルの微分を状態ベクトルと入力の線形和で表す)

状態ベクトルの微分は

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} v_1(t) \\ \frac{d}{dt} v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \frac{q_1(t)}{C_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{q_2(t)}{C_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i_1(t)}{C_1} \\ \frac{i_2(t)}{C_2} \end{pmatrix}$$

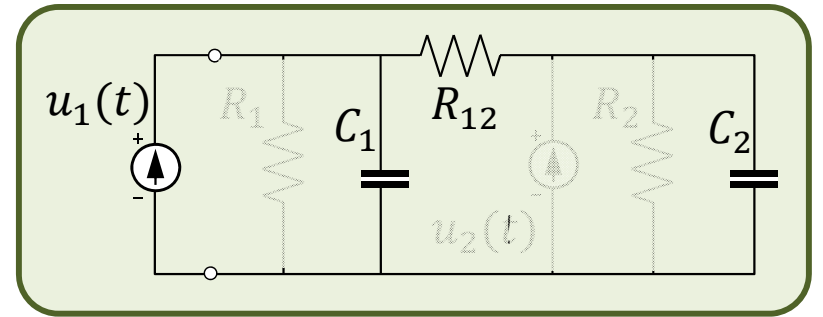
キルヒホッフの電圧、電流則より

$$\begin{cases} v_1(t) = Ri_2(t) + v_2(t) \\ i_1(t) + i_2(t) = u(t) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} Ri_1(t) = -v_1(t) + v_2(t) + Ru(t) \\ Ri_2(t) = v_1(t) - v_2(t) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{-v_1(t) + v_2(t) + Ru(t)}{RC_1} \\ \frac{v_1(t) - v_2(t)}{RC_2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \boxed{\phantom{A}} \mathbf{x}(t) + \boxed{\phantom{B}} u(t)$$

$$= \boxed{\phantom{C}}$$



初期電圧の条件より  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

### Step3 出力方程式 (出力を状態ベクトルと入力の線形和で表す)

キルヒホッフの電圧、電流則より

$$\begin{cases} v_1(t) = Ri_2(t) + v_2(t) \\ i_1(t) + i_2(t) = u(t) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} Ri_1(t) = -v_1(t) + v_2(t) + Ru(t) \\ Ri_2(t) = v_1(t) - v_2(t) \end{cases}$$

出力ベクトル  $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} = \boxed{\phantom{A}} \mathbf{x}(t) + \boxed{\phantom{B}} \delta(t)$

$$= \boxed{\phantom{C}}$$

## Step4 システム方程式(ラプラス領域のベクトル表現として行列表記)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 2\delta(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 2\delta(t) \end{cases}$$



ラプラス変換

本来  $\mathbf{B}$  は行列だが、入力が1個のため縦ベクトル  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

本来  $U(s)$  はベクトルだが、入力が1個のためスカラー  $U(s) = 2$

$$\begin{cases} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + 2\mathbf{B} \\ \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + 2\mathbf{D} \end{cases} \quad \mathbf{A} = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Step5 $\Phi(s)$ の算出 ( $\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ を計算)

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix} s+2 & -2 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}}}$$

この行列の特性は行列の行列式を見ればよい

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \boxed{\phantom{(s+2)(s+1) - (-2)}} = (s+2)(s+1) - (-2)$$

より、逆行列は存在し  $\Phi(s)$  は

$$\Phi(s) = \frac{1}{\boxed{\phantom{(s+2)(s+1) - (-2)}}} \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{-2}} & \boxed{\phantom{-2}} \\ \boxed{\phantom{-1}} & \boxed{\phantom{s+1}} \end{pmatrix}$$

逆行列の公式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)\mathbf{x}_0] + \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)\mathbf{B}U(s)]$$

Step6 ゼロ入力応答 $\mathbf{x}_1(t)$ の算出( $\Phi(s)$ と初期値から部分分数展開し、逆ラプラス変換)

$$\Phi(s)\mathbf{x}_0 = \frac{1}{s(s+3)} \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)\mathbf{x}_0] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \begin{array}{c} \phantom{\frac{1}{s(s+3)} \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \end{array} \right]$$

部分分数展開

$$\frac{cs+d}{(s+a)(s+b)} \longrightarrow \frac{\alpha}{s+a} + \frac{\beta}{s+b} \longrightarrow \alpha = \frac{ac-d}{a-b} \quad \beta = \frac{d-bc}{a-b}$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[ \begin{array}{c} \phantom{\frac{1}{s(s+3)} \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \end{array} \right]$$

逆ラプラス変換の実施(公式)

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{A}{s-\lambda} \right] = Ae^{\lambda t}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 - 2e^{-3t} \\ 2 + e^{-3t} \end{pmatrix}$$

## Step7 ゼロ状態応答 $x_2(t)$ の算出 ( $\Phi(s)$ と $BU(s)$ から部分分数展開し、逆ラプラス変換)

$$\mathbf{X}_2(s) = \Phi(s)BU(s) = \Phi(s)BU(s)$$

本来 $B$ は行列だが、入力が1個のため縦ベクトル  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

本来 $U(s)$ はベクトルだが、入力が1個のためスカラー  $U(s) = 2$

$$= \frac{1}{s(s+3)} \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\phantom{\frac{1}{s(s+3)} \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}_2(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \boxed{\phantom{\frac{1}{s(s+3)} \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}} \right] = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2e^{-3t} \\ 1 - e^{-3t} \end{pmatrix}$$

## Step8 完全応答 $x(t)$ の算出

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 - 2e^{-3t} \\ 2 + e^{-3t} \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2e^{-3t} \\ 1 - e^{-3t} \end{pmatrix} = \boxed{\phantom{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 - 2e^{-3t} \\ 2 + e^{-3t} \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2e^{-3t} \\ 1 - e^{-3t} \end{pmatrix}}}$$

## Step9 出力の算出

$$\mathbf{y}(t) = \boxed{\phantom{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 - 2e^{-3t} \\ 2 + e^{-3t} \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2e^{-3t} \\ 1 - e^{-3t} \end{pmatrix}}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 2\delta(t) = \boxed{\phantom{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 - 2e^{-3t} \\ 2 + e^{-3t} \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2e^{-3t} \\ 1 - e^{-3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 2\delta(t)}}$$

## 一般解

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 + 2e^{-3t} \\ 4 - e^{-3t} \end{pmatrix}$$

答えが出たら  $t = 0$  を代入し、初期値  $\boldsymbol{x}_0$  と一致するかどうか確認

$$\boldsymbol{x}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 + 2 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

あれ？合わない？？

## ゼロ入力応答

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 - 2e^{-3t} \\ 2 + e^{-3t} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ゼロ入力応答(入力がないとき)の  $t = 0$  での解と初期値  $\boldsymbol{x}_0$  は一致

## ゼロ状態応答

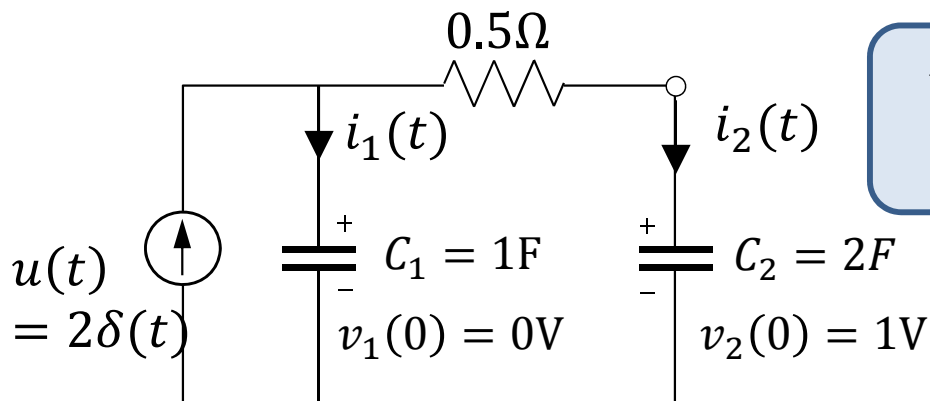
$$\boldsymbol{x}_2(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + 4e^{-3t} \\ 2 - 2e^{-3t} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_2(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ゼロ状態応答(初期値が0のとき)の  $t = 0$  での解はキャパシタ電圧とインダクタ電流連続の条件から決まる

そもそも、ゼロ状態応答は初期値が0の応答なので  $t = 0$  での解は0でなければならない。では、ゼロ状態応答が間違っているのか？？



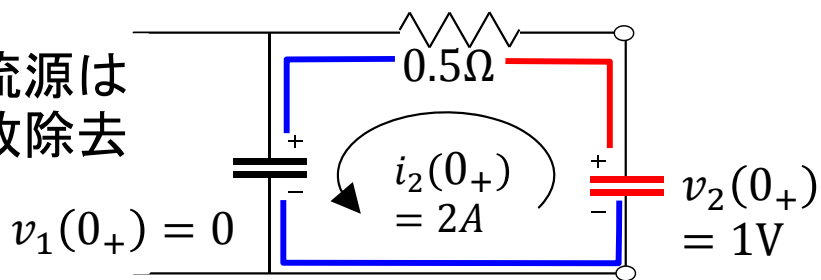
# デルタ関数の入力と初期値について



$t = 0_+$ の瞬間の挙動をキャパシタの初期電圧と電流源とに分けて議論

## ・キャパシタの初期電圧

電流源は開放除去



キャパシタ2からも抵抗を介して2Aの電流が流れようとする。

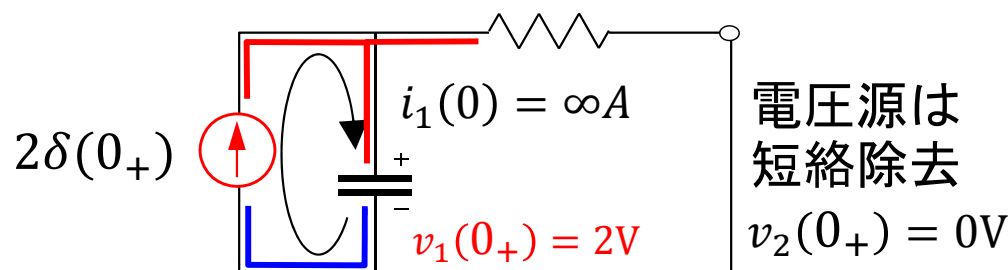
$$Q_1(0_+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} 2 dt = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$

$$= C_1 v_1(0_+)$$

$v_1(0_+) = 0V$  従って、 $v_2(0_+) = 1 - v_1(0_+)$

$v_2(0_+) = 1V$  より、ゼロ入力応答と一致

## ・電流源



電流源がデルタ関数なので、 $\infty$ の電流が瞬時にキャパシタ1に流れ、充電される

$$Q_1(0_+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} 2\delta(t) dt = 2 = C_1 v_1(0_+)$$

$v_1(0_+) = 2V$

抵抗があるため、電流は抵抗に流れない

$v_2(0_+) = 0V$  より、ゼロ状態応答と一致

これが0状態応答が初期値と合わない理由  
→ 電流源がデルタ関数のとき注意