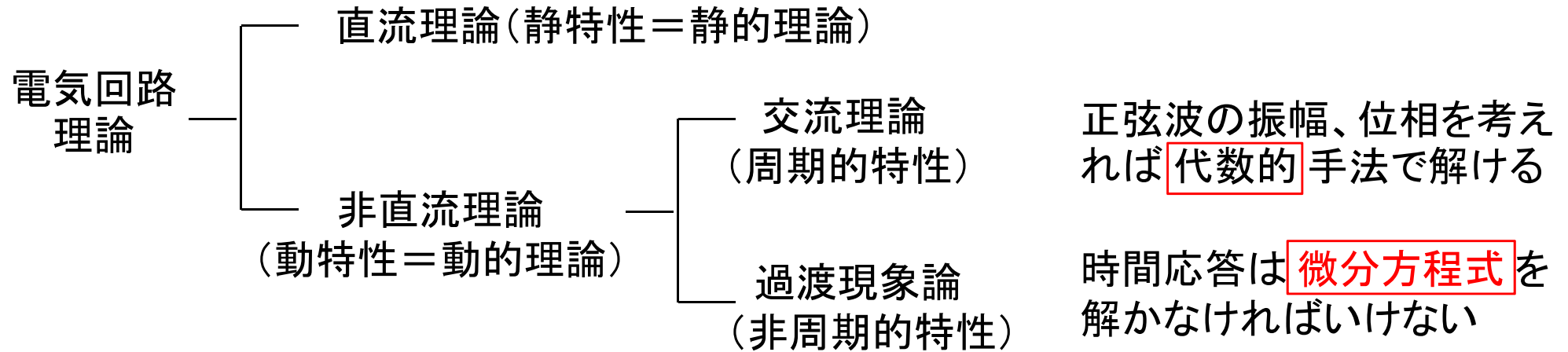
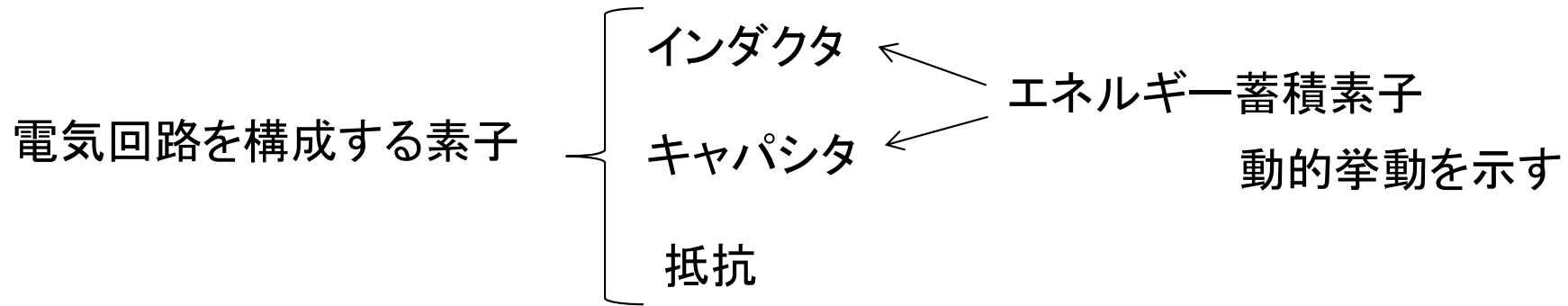


電気回路と動的解析



電気回路の動的解析、あらゆる動的システムの挙動を説明できる

ラプラス変換

世の中で動いている電気、機械、熱、流体等のシステム

エネルギーや信号はお互いの中で変換されながら相補的に機能している

微分方程式 で表される

動的回路解析

— 線形システムの動的特性解析 —

キーワード

電気回路、動的解析、ラプラス変換、制御工学、波動方程式

授業の目標および期待される学習効果

目標: **ラプラス変換**を使い回路の動的解を導出できること、
システム方程式や伝達関数の概念を理解できること、

学習効果: 基本回路の動的特性を**直観的に理解**できるようにする。

授業の概要

電気回路の過渡現象を解析できれば、様々なシステムの動的挙動の解析につながる。そのため、集中定数回路の動的挙動を微分方程式の解から解析する手法を述べ、動的特性の直観的な理解力を養う。また、ラプラス変換を用い、一般のシステムに対する回路方程式の動的解析に応用する。

授業内容のレベル

講義の位置づけとしては、電気回路IIと高周波回路工学をつなげる役割を担う。電気回路Iが理解でき、微分方程式の解法がある程度理解できることが前提

履修資格

特にないが、電気回路I、IIを履修していることが望ましい。

この授業の基礎となる科目

電気回路I、電気回路II、基礎電気数学、制御工学

次に履修が望まれる科目

高周波回路工学、光回路工学、画像工学

関連授業科目

電気電子計測、デジタル信号処理、電磁気学III

テキスト/参考書

電気回路の動的解析(森北出版、小林幹/稲村實/井出英人 共著)

授業の形式(授業方法)

テキストの重要な点を抜粋し、パワーポイントを使用して講義する。

毎回小テストを行い、出席代わりにする

講義資料はpdfをダウンロード、各自で印刷すること。

評価(成績評価基準)

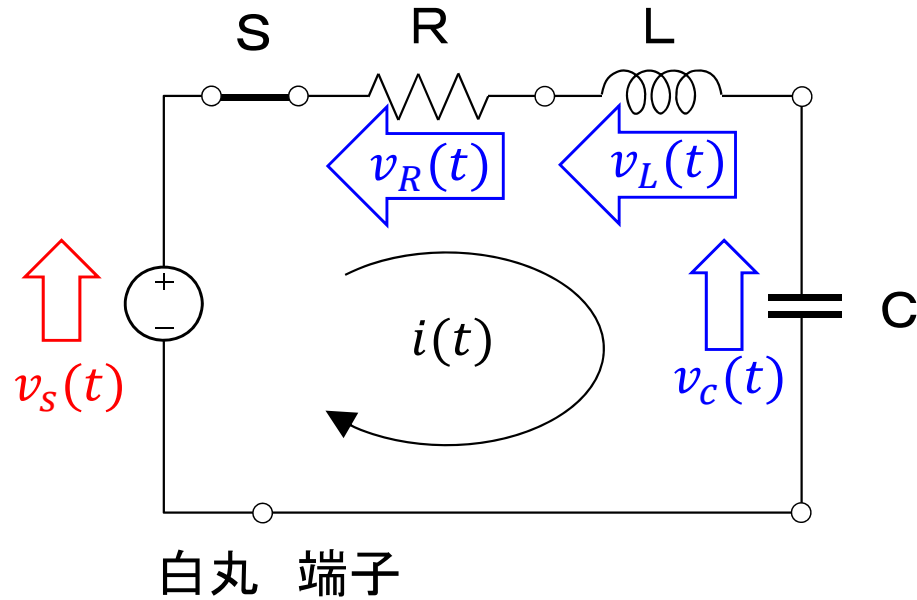
出席と期末試験により評価する。基本的に小テストは成績に考慮しない

試験は講義用ppt資料のみ持ち込み可。

授業の展開(授業計画)

1. R、L、C素子の動的挙動
2. RL直列回路の動的解
3. RC直列回路の動的解
4. 直流電流源での動的解
5. 直流以外の電圧源での動的解
6. R、L、C直列回路の動的解
7. 無限大波形とインパルス応答
8. ラプラス変換の基礎
9. ラプラス変換による動的解析
10. システムの伝達関数
11. フィードバック系の伝達関数
12. システム方程式
13. システム方程式の立て方
14. ラプラス変換によるシステム方程式の解法の基礎
15. システム方程式の解法例

動的素子



動的特性に関する素子 → 動的素子

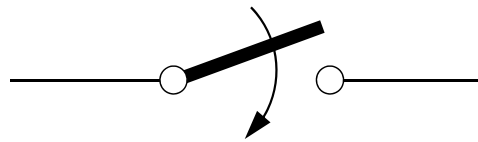
電源	→	起電力	
抵抗	→	逆起電力	
コイル、コンデンサ	→	逆起電力	起電力
スイッチ			

素子両端の電圧	$v(t)$	回路定義
素子に流れる電流	$i(t)$	
素子の鎖交磁束	$\psi(t)$	
素子の電荷	$q(t)$	

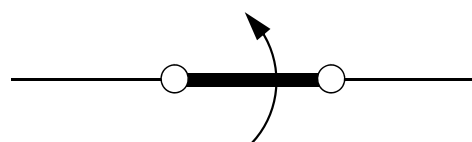
変数 t はこの値が時間によって変化することを意味する

・スイッチ

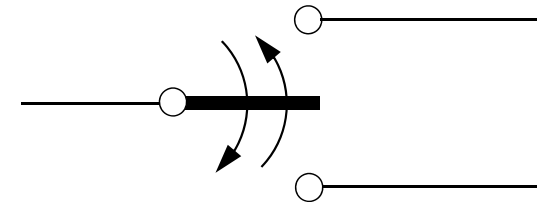
過渡現象論ではスイッチの開閉に伴う問題を取り扱うことが多い



スイッチを閉じる



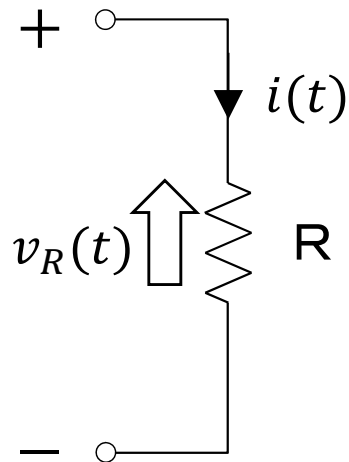
スイッチを開ける



スイッチを切り替える

スイッチの開閉は **瞬時に** 完結するものとする。

・抵抗 R



抵抗に電流が矢印の向きに流れると仮定し、向きを定義する。

抵抗に対して電流の上流の電位は下流の電位より高く、**電流と逆向き**の電位差 $v_R(t)$ を **逆起電力** と呼ぶ

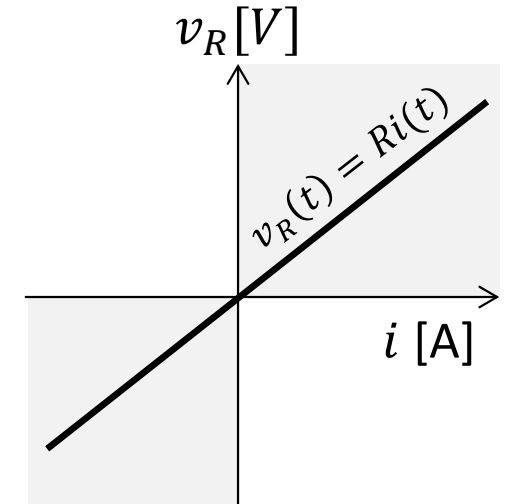
抵抗の機能は以下の式によって表される

$$i(t) = \frac{1}{R} v_R(t) \quad (R > 0)$$

抵抗値は常に正、単位は $[\Omega]$

電流が矢印に流れれば $Ri(t)$ だけ逆起電力が発生

電流が流れなければ、+、-両端子は同電位 (**短絡**と等価)



抵抗の特性

回路素子の瞬時電力 [W]

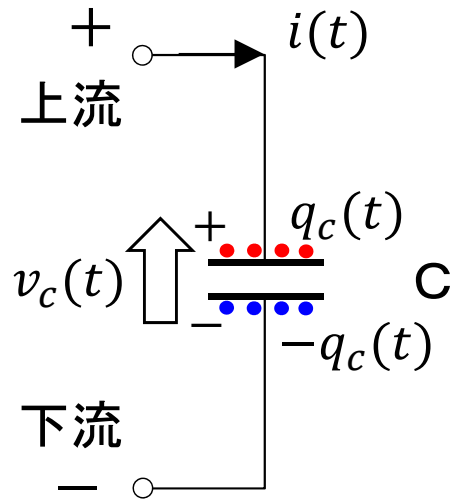
$$p_R(t) = v_R(t)i(t)$$

$p_R(t)$ は $Ri(t)^2$ より必ずゼロ以上

電力の時間積分はエネルギーなので、エネルギーを受け取り、**熱等として消費する**だけの素子である。抵抗の消費する電気エネルギーは

$$E_R(t) = \int_{T_1}^t p_R(\tau) d\tau = \int_{T_1}^t Ri(\tau)^2 d\tau$$

・キャパシタ C



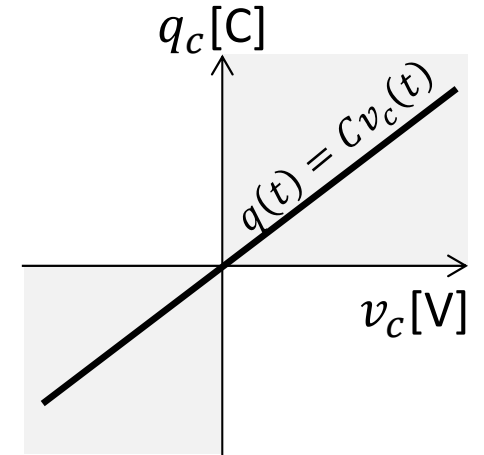
極板間の静電引力により **電荷** を貯める働きをする動的素子 → キャパシタ

電荷 $q_c(t)$ と端子間電圧 $v_c(t)$ との関係は

$$q_c(t) = C v_c(t) \quad (C > 0)$$

静電容量 C は常に正、単位は [F]

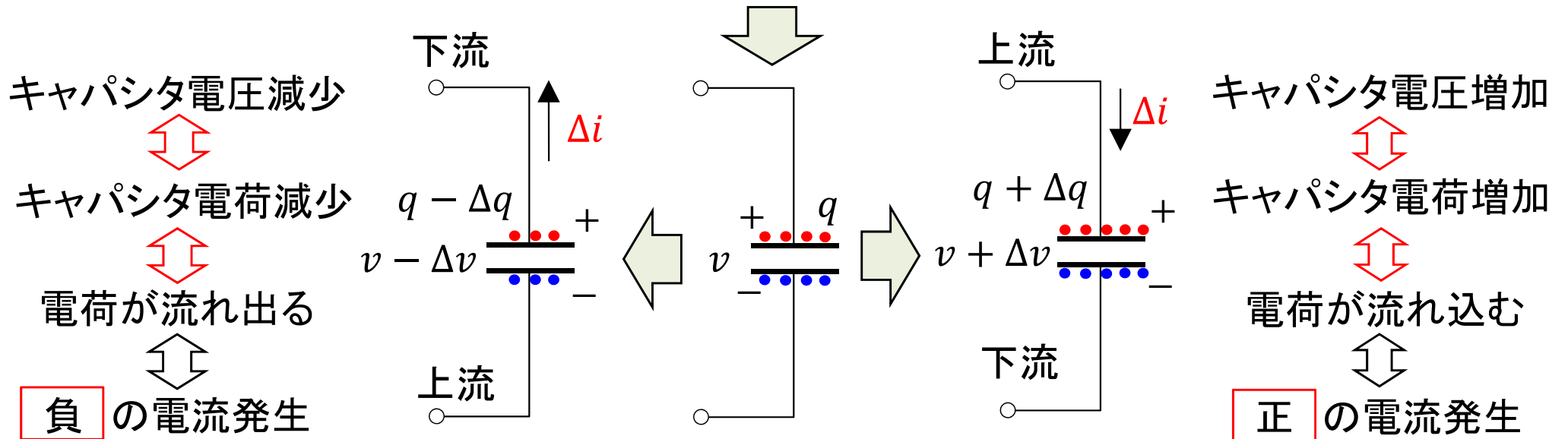
端子間電圧 $v_c(t)$ に **比例した電荷** が蓄積
電荷の時間変化に **瞬時に** 電圧が追従



キャパシタの特性

電流によらず, キャパシタ電荷とキャパシタ電圧は比例

キャパシタ電荷の変化なし \leftrightarrow 電流が流れない (**開放**)

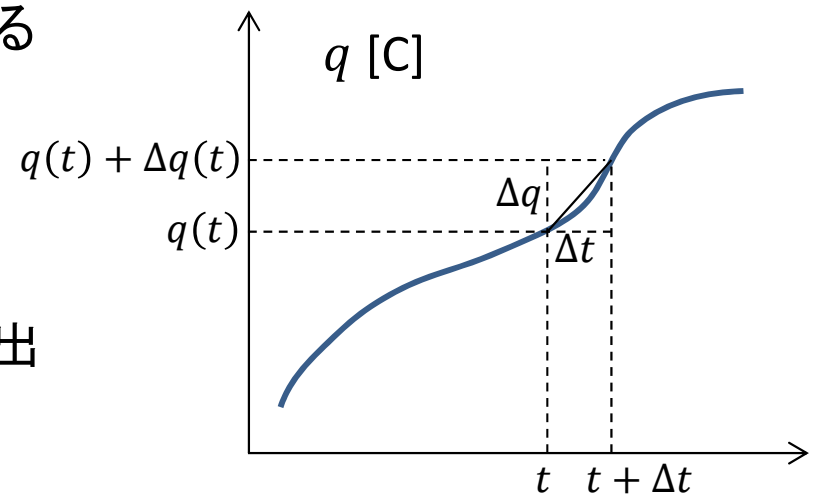


キャパシタ電荷の増加(減少) \leftrightarrow 正(負)の電流を発生させる

一般に、導線に流れる伝導電流 $i(t)$ と導線を通過する電荷 $q(t)$ との関係は

$$i(t) \cong \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} q(t)$$

キャパシタでは、+極に(-極から)電荷が溜まる(流出する)により、**変位**電流を流す → キャパシタ電流



$$i_c(t) = C \frac{d}{dt} v_c(t)$$

キャパシタには **逆起電力の時間変化** に比例した電流が流れる

キャパシタに **電流が流れれば** , **逆起電力の時間変化** が発生

微分表現を積分表現にすると

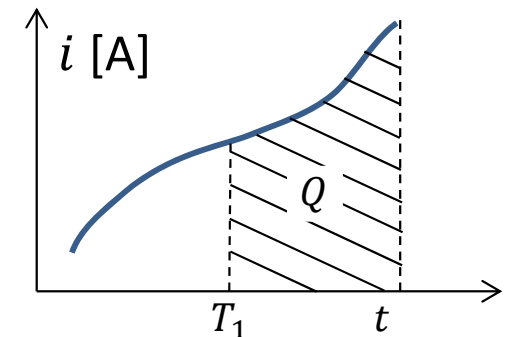
$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{T_1}^t i_c(\tau) d\tau$$

キャパシタ電流を時間積分すればキャパシタの逆起電力が決まる

キャパシタ電流 → 電荷発生 → **キャパシタ電圧発生**

因果関係

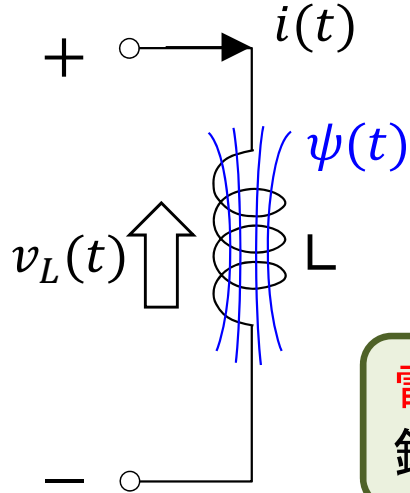
キャパシタ電圧は **急激に変化できない** = **連続**



(積分表現が動的特性において本質的)

・インダクタ L

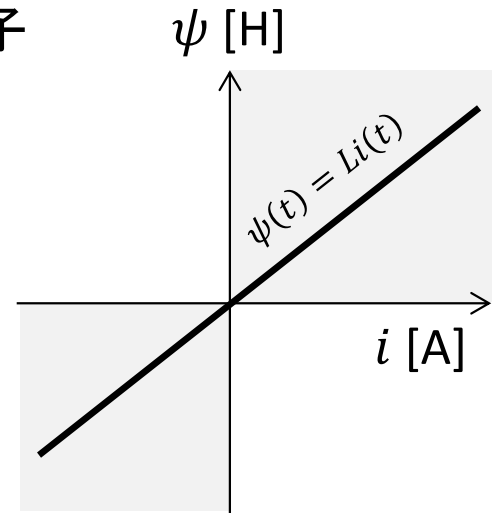
インダクタは磁束を貯める働きをする動的素子



鎖交磁束 $\psi(t)$ と電流 $i(t)$ との関係は

$$\psi(t) = Li(t) \quad L > 0$$

インダクタンス L は常に正、単位はヘンリー [H]

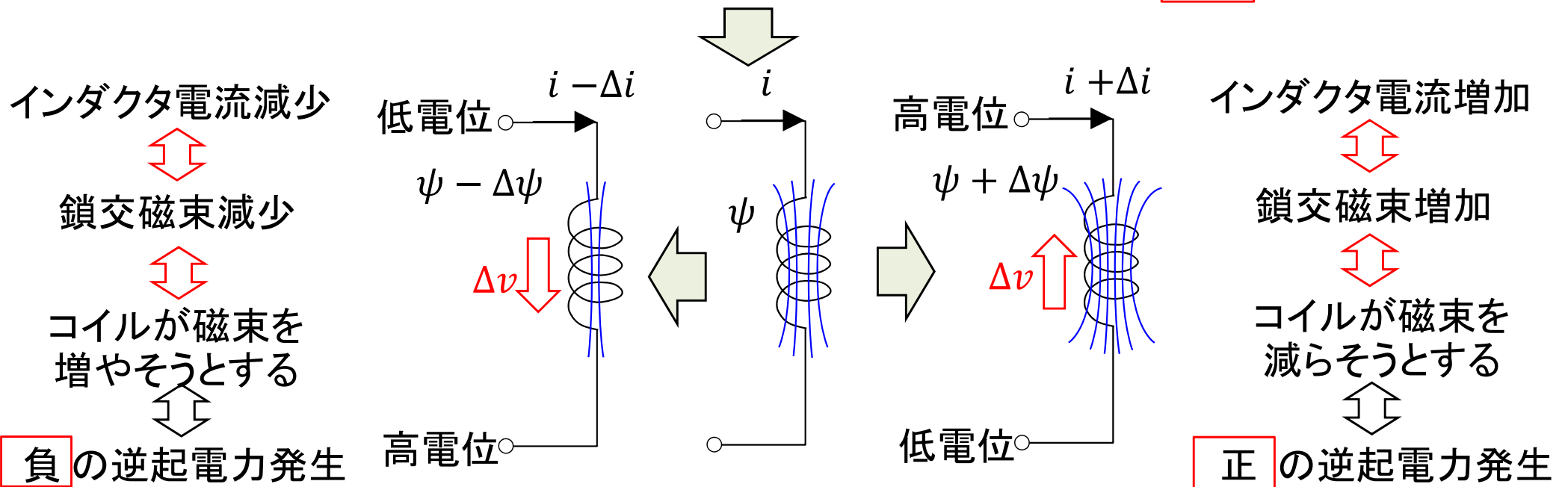


インダクタの特性

電流 $i(t)$ に比例した鎖交磁束が蓄積
鎖交磁束の時間変化に瞬時に電流が追随

インダクタ電圧によらず、鎖交磁束とインダクタ電流は比例

インダクタ電流の変化なし \leftrightarrow 逆起電力が表れない (短絡)

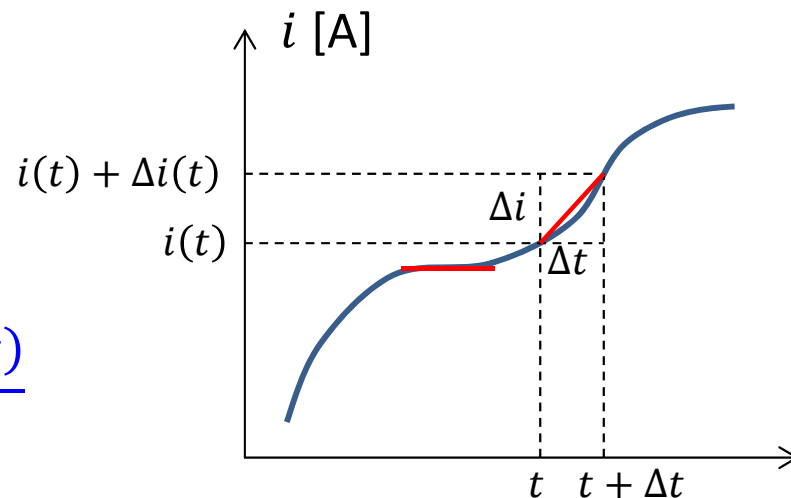


インダクタ電流の増加(減少) \leftrightarrow 正(負)の逆起電力を発生させる

前述のようにインダクタの働きとして、鎖交磁束を**変化させない**ようにする働きがある。

鎖交磁束の変化とインダクタの起電力の関係は

$$\text{起電力} = -\frac{d\psi(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \text{逆起電力 } v_L(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$



$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$$

インダクタは **電流の時間変化** に比例した逆起電力を発生

インダクタは **逆起電力が発生** すれば電流の時間変化を生じる

微分表現を積分表現にすると

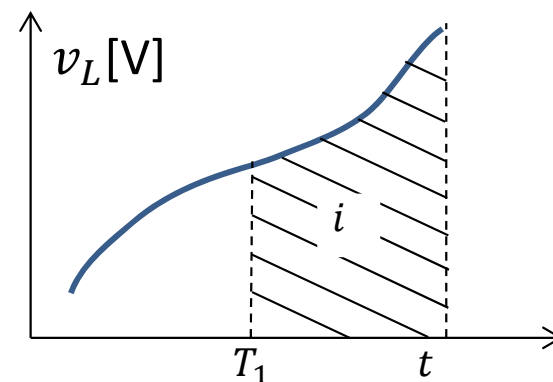
$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{T_1}^t v_L(\tau) d\tau$$

インダクタの逆起電力を積分すればインダクタ電流が決まる

インダクタ電圧 → 鎖交磁束発生 → **インダクタ電流発生**

因果関係

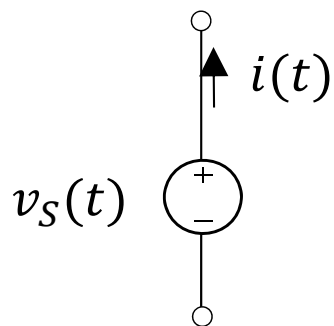
インダクタ電流は**急激に変化できない** = **連続**



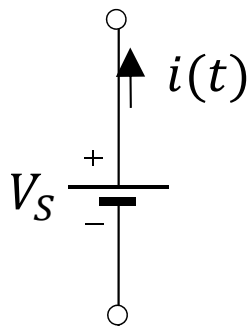
(積分表現が動的特性において本質的)

・電源

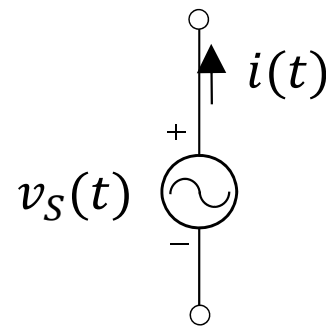
-端子から+端子に向かって流れる向きに電流を取る



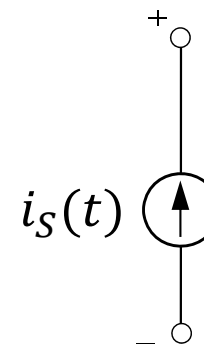
任意の電圧源



直流電圧源



交流電圧源



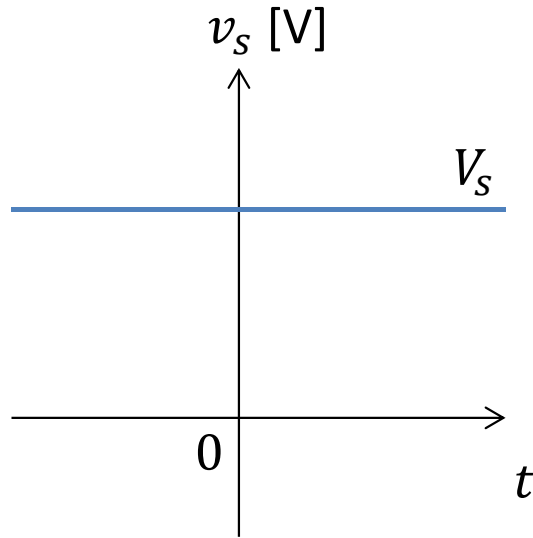
電流源

電圧源 → 端子間に現れる電圧 $v_S(t)$ が、電流 $i(t)$ に無関係に決まる

電流源 → +端子から流れだす電流 $i_S(t)$ が、端子間の電圧に無関係に決まる

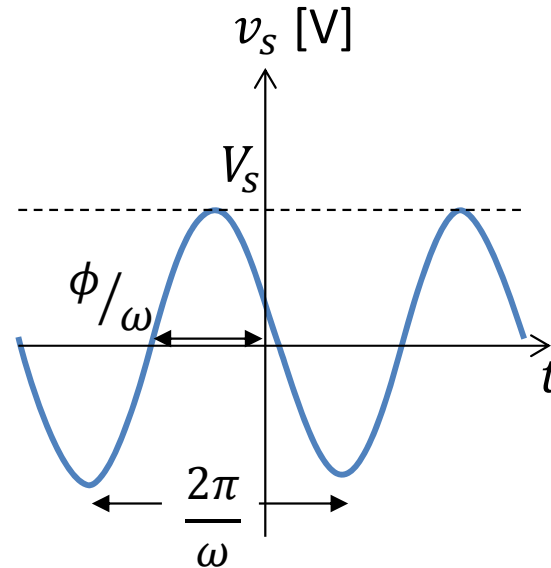
電源波形

負荷 (電源回路につながる回路) のインピーダンスに依存せず、決まった値



直流 電圧

$$v_s(t) = V_s$$



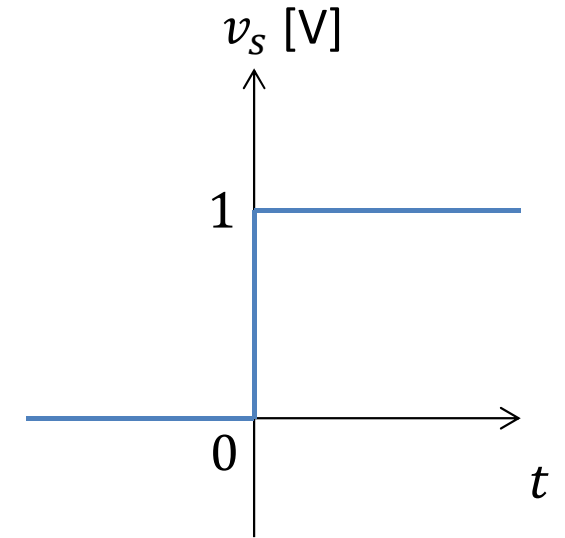
正弦波交流 電圧

$$v_s(t) = V_s \sin(\omega t + \phi)$$

角周波数 ω 周期 $\frac{2\pi}{\omega}$

振幅 V_s

位相 ϕ



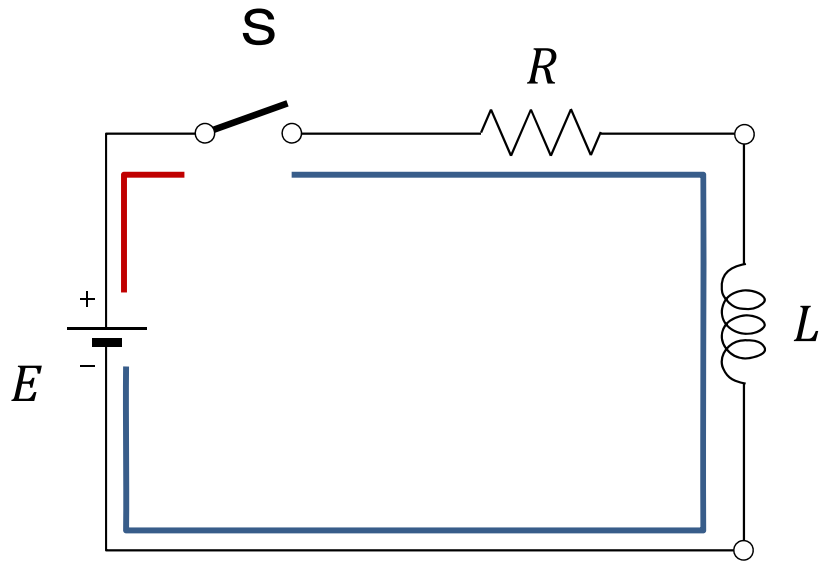
単位ステップ 電圧

$$v_s(t) = u(t)$$

$$\begin{cases} u(t) = 0 & (t < 0) \\ u(t) = 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

RL直列回路の動的解

RL直列回路

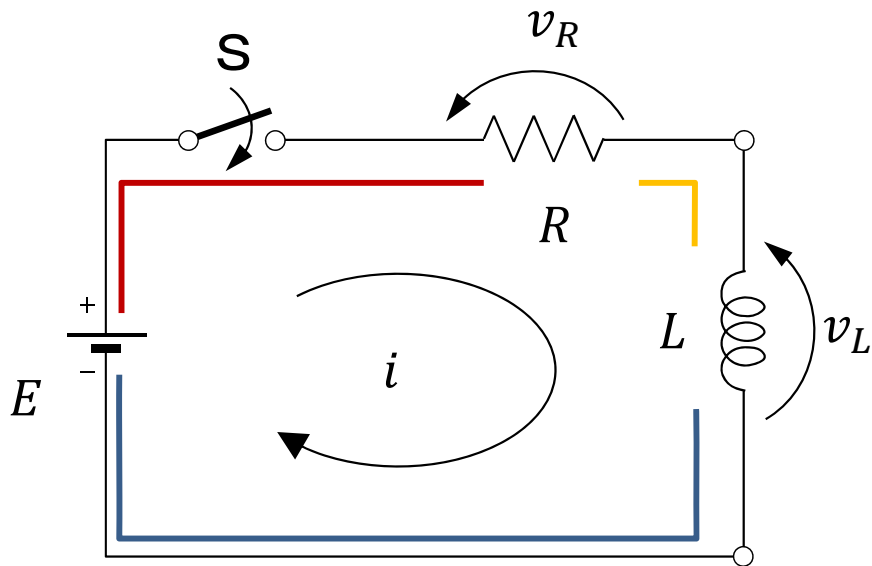


スイッチSが開 → 回路に電流流れない

v_R 、 v_L は

電源の+からスイッチまでは

スイッチの両端に が発生



スイッチSが閉 → 電流*i(t)*が流れようとする

抵抗には *i(t)* に比例した電圧降下

$$v_R = Ri(t)$$

インダクタには *i(t)* の に比例した電圧降下

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

キルヒホッフの電圧則 $E - v_R - v_L = 0$ より

→ 逆起電力の総和 = 起電力の総和

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E$$

これは となっている

回路方程式の解法

微分方程式は、において、その式を満足しなければならない

1階の常微分方程式

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E$$

この解法には、

・ $i(t)$ の取りうる値を既知として、その関数の係数を決定する

・ を使う手法

未定係数法

ステップ1
余関数の算出

ステップ2
特殊解の算出

ステップ3
一般解の決定

数学的表現

として初期条件から未定係数を決定

過渡解の形を求める

定常解を求める

として初期条件から完全解を決定

現象論的、物理的表現

ステップ1 余関数(過渡解)の算出

微分方程式の としたときの解 $i_t(t)$ を求める

$$L \frac{di_t(t)}{dt} + Ri_t(t) = 0$$

$i_t(t) = e^{\lambda t}$ とおく。 ()

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} \text{ より}$$

$$L\lambda e^{\lambda t} + Re^{\lambda t} = 0$$

まとめると

$$(L\lambda + R)e^{\lambda t} = 0$$

この方程式が任意の時刻 t で成立するためには...

$$\text{} = 0$$

上式を補助方程式、特性方程式と呼ぶ。
また、この解 λ_0 は と呼ばれる。

$$\lambda_0 = -\frac{R}{L}$$

補足

与式の微分を関数に対するオペレータとして以下のように変形すると

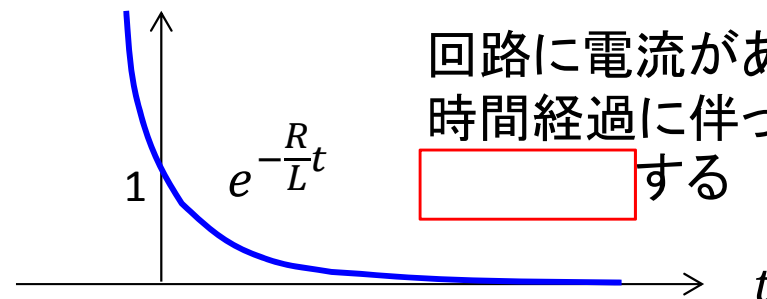
$$\left(L \frac{d}{dt} + R \right) i_t(t) = 0$$

補助方程式は ても得られる。
一般の常微分方程式の解にも有効

固有値を代入すれば、 $i_t(t) = e^{-\frac{R}{L}t}$

$i_t(t)$ は した回路が満足する解

電源のない回路 $\rightarrow E = 0$ の回路



ステップ2 特殊解(定常解)の算出

$i_s(t) = ke^{\eta t}$ とおいたときの、微分方程式の解 $i_s(t)$ を求める

k, η は とする

$$L \frac{di_s(t)}{dt} + Ri_s(t) = E$$

代入して

$$(L\eta + R)ke^{\eta t} = E$$

これが、任意の t で成立するためには...

右辺が定数(時間変化なし)より

が必要である。代入すると

$$Rk = E$$

より、以下が得られる。

$$i_s(t) = \frac{E}{R}$$

この解を 、特解と呼ぶ。

微分方程式右辺が時間に無関係
→ 特殊解も時間に無関係

特殊解は微分方程式を満たすが、時間的に変化せず、明らかに完全な解ではない。

では、一般解はどのように求めれば良いだろうか？

ステップ1とステップ2の微分方程式を比べよう

$$L \frac{di_t(t)}{dt} + Ri_t(t) = 0$$

$$L \frac{di_s(t)}{dt} + Ri_s(t) = E$$

余関数の式を K 倍して両式の和を取ると、

$$L \frac{d\{i_s(t) + Ki_t(t)\}}{dt} + R\{i_s(t) + Ki_t(t)\} = E$$

$$i(t) = i_s(t) + Ki_t(t) \text{ も }$$



これが一般解

ステップ3 一般解

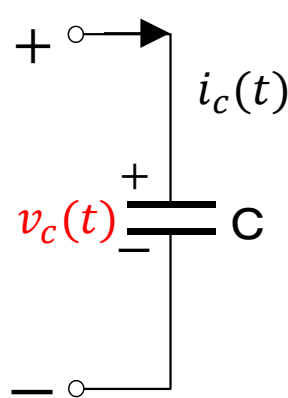
一般解 = (未知数 K を含む)

電圧や、電流の から初期値の条件を求め、 K を決定

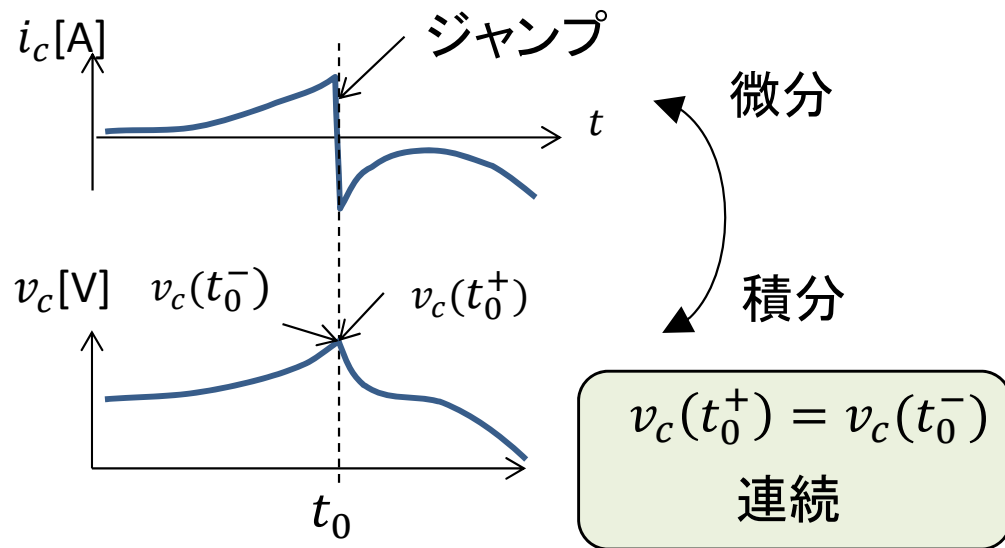
キャパシタの電圧

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau$$

流れる電流の時間積分
が端子間電圧に比例



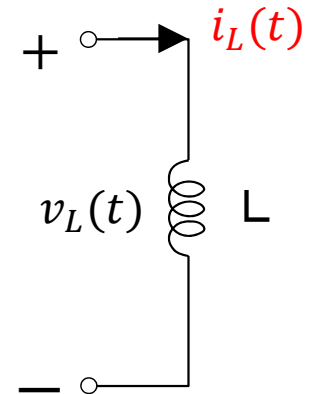
キャパシタ電流 $i_c(t)$ が不連続だったとしても、 は必ず連続



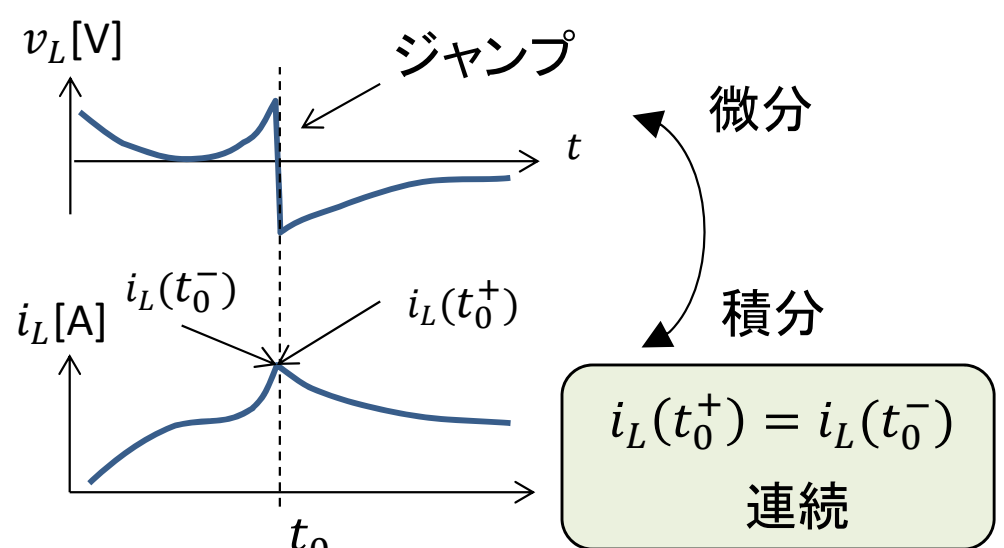
インダクタの電流

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(\tau) d\tau$$

端子間電圧の時間積分
が流れる電流に比例



インダクタ電圧 $v_L(t)$ が不連続だったとしても、 は必ず連続



ステップ3 一般解の係数決定

RL直列回路に流れる電流の一般解は

$$i(t) = i_s(t) + Ki_t(t) = \frac{E}{R} + Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

インダクタを流れる電流は連続であるため



スイッチを閉じる瞬間を $t_0 = 0$ 、 $t < 0$ では電流 i_L は0



一般解に代入すると、

$$i(0) = \frac{E}{R} + Ke^{-\frac{R}{L}0} = 0 \quad \text{したがって}$$

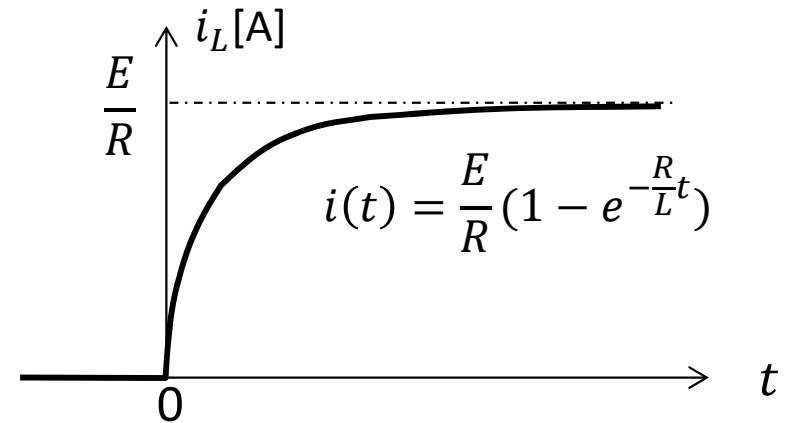
$$K = -\frac{E}{R}$$

一般解は

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

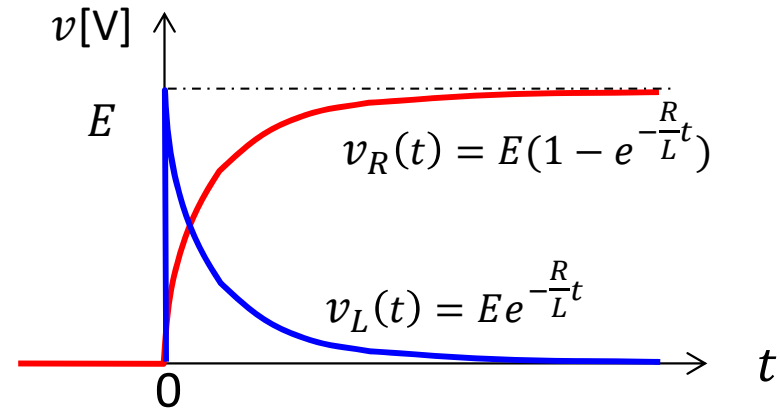
$$v_R(t) = Ri(t) = E(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = Ee^{-\frac{R}{L}t}$$

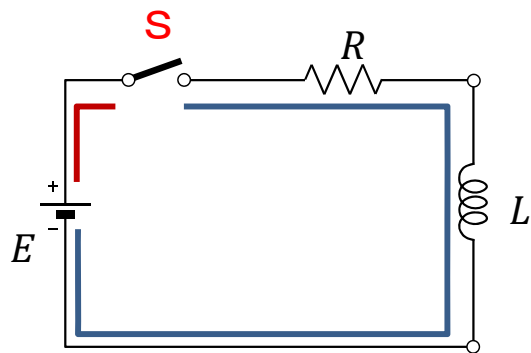


回路の電流は時刻0から 増加し、徐々に増加が となり、 E/R に漸近していく。

時刻0以前は基本的に



RL直列回路の動的特性

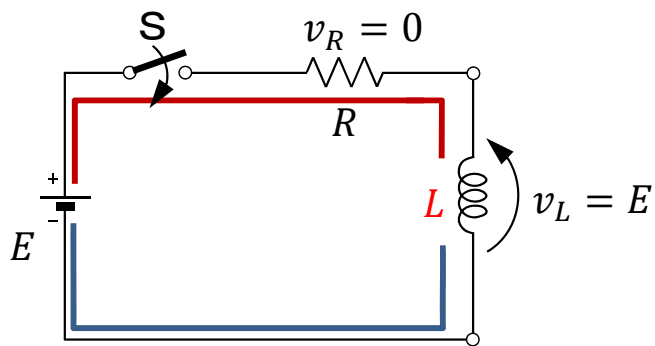


スイッチを閉じる前 ($t < 0$)

$$i(t) = 0$$

$$v_R(t) = v_L(t) = 0$$

スイッチの両端電圧

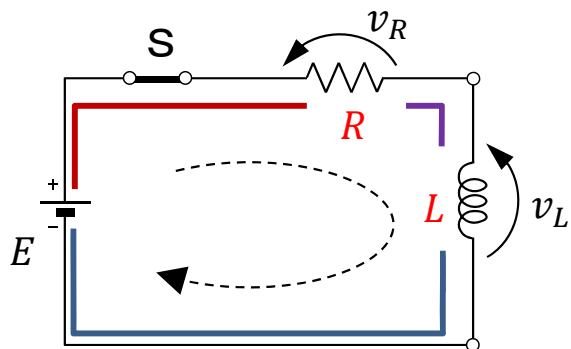


スイッチを閉じた直後

インダクタの電流は連続なので、 $i(0) = 0$

$$v_R(0) = 0$$

$$v_L(0) = E \text{ で }$$

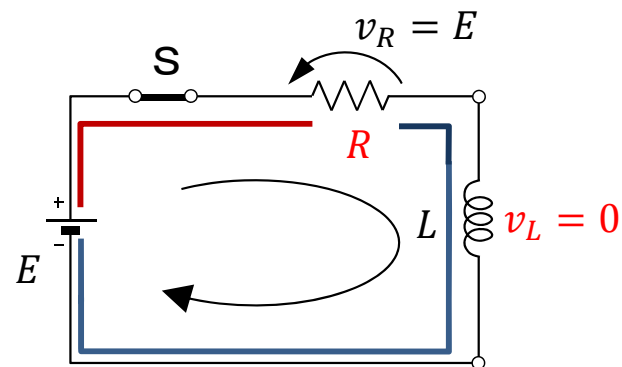


スイッチを閉じた少しあと ($t > 0$)

回路の電流が増加

$v_R(t)$ が増加

分圧されて $v_L(t)$ が E から **減少**



スイッチを閉じ十分時間が経った後 ($t = \infty$)

定常状態ではインダクタの電流変化がなく、

インダクタ電圧0なので

← 短絡と等価

$$v_R(t) = E$$

$$i(\infty) = E/R$$

RL直列回路の過渡現象まとめ

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad v_R(t) = Ri(t) = E(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = E e^{-\frac{R}{L}t}$$

電流、電圧 → ある状態から単調に増加、減少したり、急激に増加した後単調に減少する
最終的に一定値に収束、定常状態に至るまでの現象を と呼ぶ。

現象論的には、完全解 =

ステップ1での余関数の解が過渡解

電源電圧を短絡除去した回路固有の時間応答の性質を持つ。

$y(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$ に対応する τ を考えると、

τ は過渡現象を考える際の とみなせ、時定数と呼ばれる

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{-1}{\text{特性方程式の固有値}}$$

時定数大きい → した変化

小さい → 変化

通常、過渡現象は 5τ でほぼ定常状態に達すると考えてよい。

に
無
関
係
に
定
ま
る

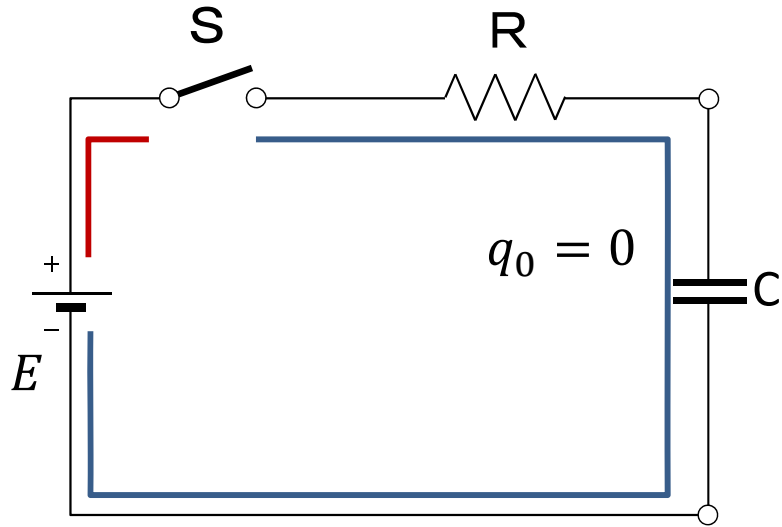
ステップ2で得られる特殊解は $t > \infty$ の解 (定常解) であり、電源に依存して定まる

ただし、微分方程式右辺の電源は連続関数 (例えば定数、正弦関数) でなければならない

直流RL回路での定常状態とは → 電流が一定 → インダクタ電圧 0

RC直列回路の動的解

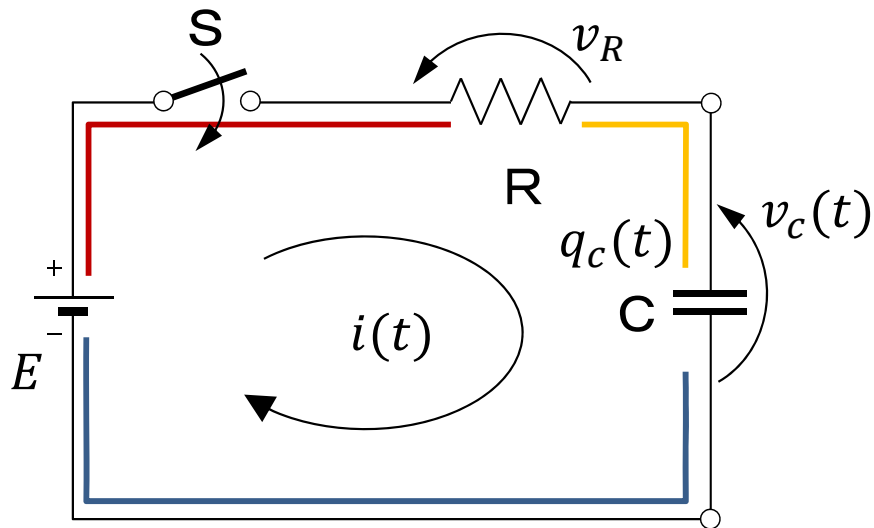
RC直列回路



スイッチSが開 → 回路に電流流れず



電源の一端からスイッチまでの導体は等電位
スイッチの両端に起電力に等しい電位差 E が発生



スイッチSが閉 → 回路に電流 $i(t)$ が流れる

抵抗には電圧降下 $v_R = Ri(t)$

キャパシタには電圧 $v_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$

キルヒホッフの電圧則  より

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E$$



電流を電荷の時間変化と考えれば

これは1階の常微分方程式となっている

RC直列回路の解

$q_c(t) = Cv_c(t)$ より

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = E$$

ステップ1 (電源を短絡除去した解)

$v_{ct}(t) = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$(RC\lambda + 1)e^{\lambda t} = 0$$

この式が $t \geq 0$ で成立するには

$$RC\lambda + 1 = 0$$

したがって、固有値 λ_0 は

$$\lambda_0 = -\frac{1}{RC}$$

余関数は $v_{ct}(t) = e^{-\frac{t}{RC}}$

ステップ2 (電源に依存する解)

$v_{cs}(t) = ke^{\eta t}$ とすると、

$$(RC\eta + 1)ke^{\eta t} = E$$

この式が $t \geq 0$ で成立するには

$$\eta = 0$$

より、 $k = E$

より**特殊解**は $v_{cs}(t) = E$

ステップ3

一般解 $v_c(t)$ は

$$v_c(t) = \boxed{\phantom{E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}}$$

初期電荷 $q(0)$ は 0 より初期電圧 $v_c(0^-) = 0$

キャパシタ電圧は $\boxed{}$ ため、 $v_c(0^+) = 0$

$$K = \boxed{}$$

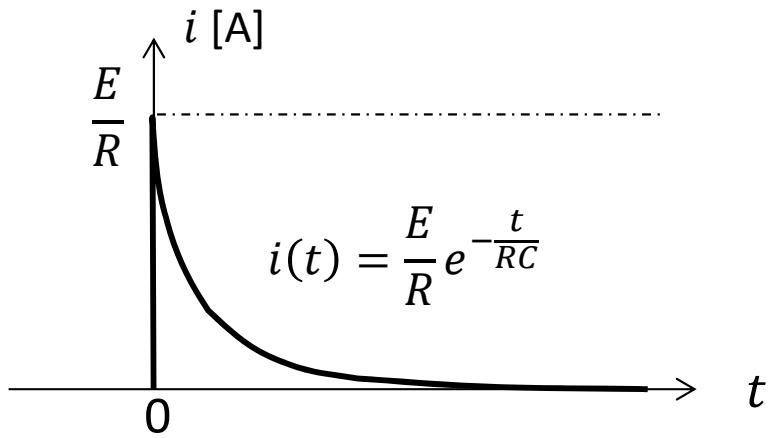
よって、一般解は

$$v_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

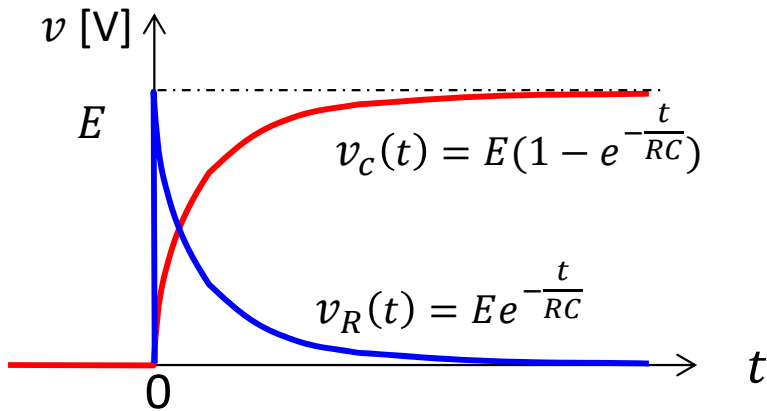
$$i(t) = \frac{dq_c(t)}{dt} = C \frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_R(t) = Ri(t) = E e^{-\frac{t}{RC}}$$

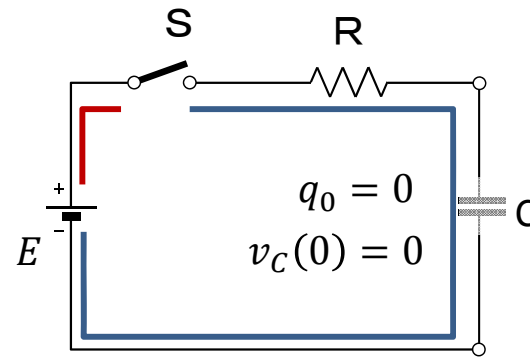
RC直列回路の動的挙動



RC直列回路はスイッチを入れた直後に電流が瞬時に流れ、 E/R から減少し、0に漸近していく。

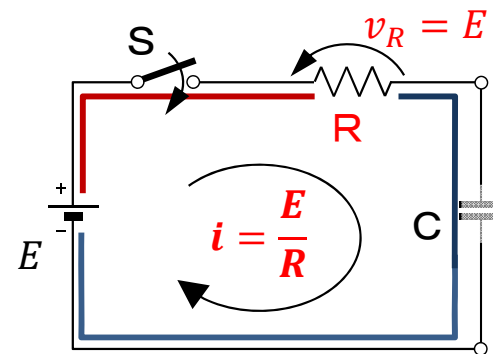


キャパシタ電圧は0から急増し、徐々に増加割合が低下し、 E に漸近していく。



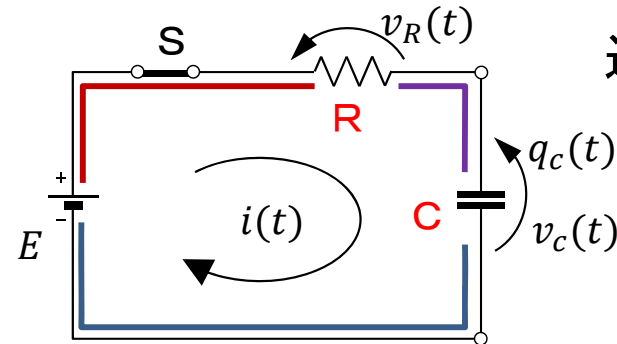
スイッチを閉じる前

初期電荷=0
キャパシタ電圧=0



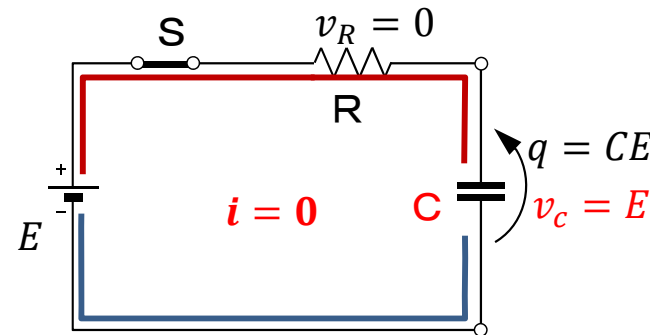
スイッチを閉じた直後

キャパシタ電圧は連続なため、抵抗に電圧 E が瞬時にかけられ、に電流も流れようとする



過渡状態

電流による電荷チャージにより、 v_C が増加、 v_R はその分、減少していく



定常状態

キャパシタ電圧が電源電圧になるまで増加したら、

RC直列回路の動的挙動(2)

定常状態からスイッチを開くとどうなるか？

スイッチ両端は等電位 → 電流も電圧も変化なし

スイッチを再度閉じると → やはり回路に電流は流れない

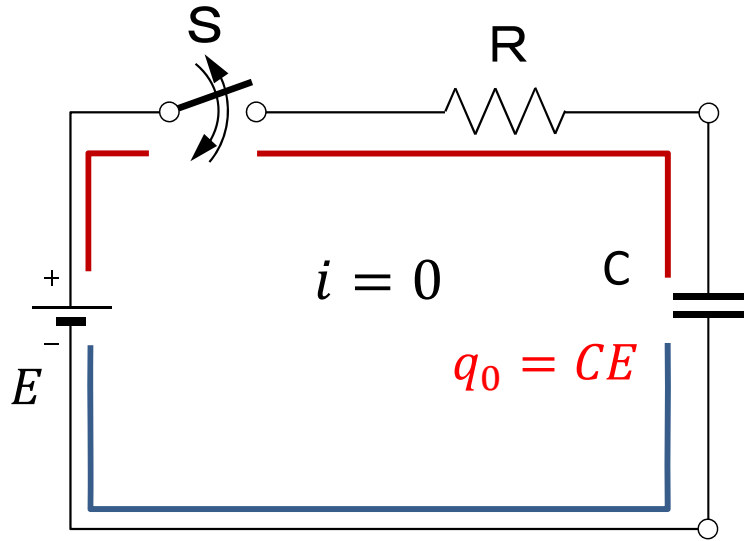
このとき、回路は同じなので、微分方程式は同じ →

一般解 $v_c(t)$ は $v_c(t) =$

$v_c(0) = E$ より、 $K = 0$

$$v_c(t) = E \quad i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} = 0 \quad v_R(t) = Ri(t) = 0$$

微分方程式の解は、あらゆる初期条件における一般解を表現できる



コンデンサの初期電圧が $2E$ のとき、スイッチを閉じると →

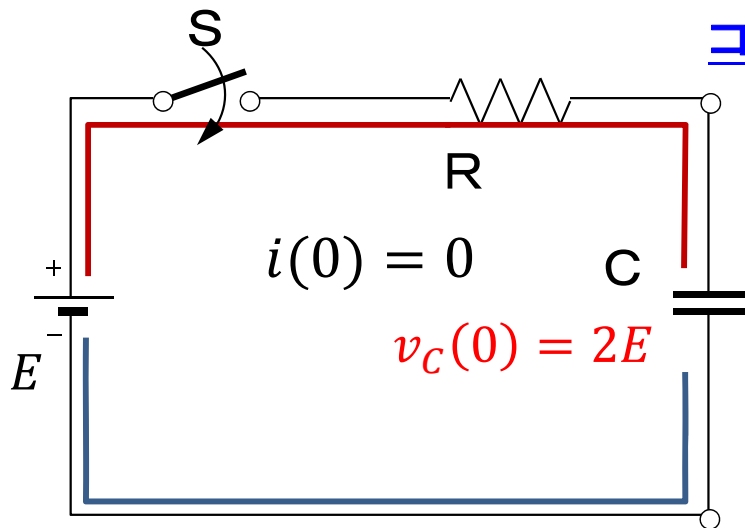
初期条件

より、 $K = E$

$$v_c(t) = E(1 + e^{-\frac{t}{RC}})$$

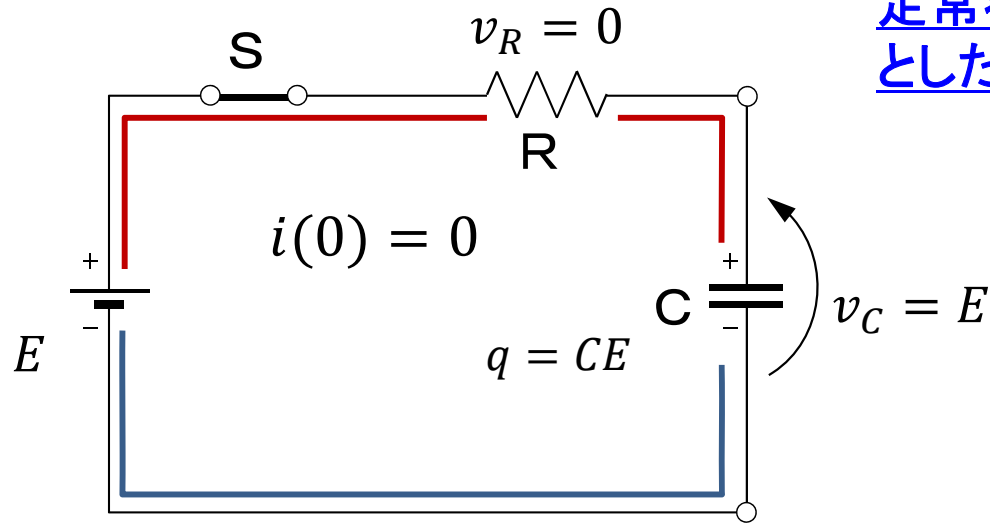
$$i(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

コンデンサの電圧が E になるまで電荷を する。
逆向きに電流が流れる



RC直列回路の動的挙動(3)

定常状態から $t = 0$ で電源を短絡除去し、 $E = 0$ としたときどうなるか？



回路方程式は

$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0$$

この式は特性方程式そのものであり、特殊解は0なので、余関数から一般解は

$$v_C(t) = K e^{-\frac{t}{RC}}$$

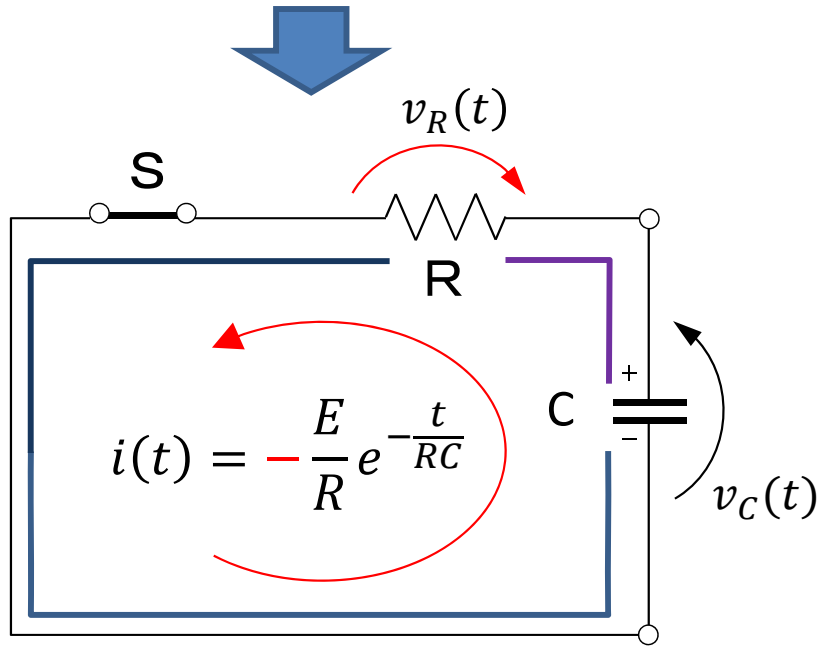
初期条件は $v_C(0) = E$

したがって、

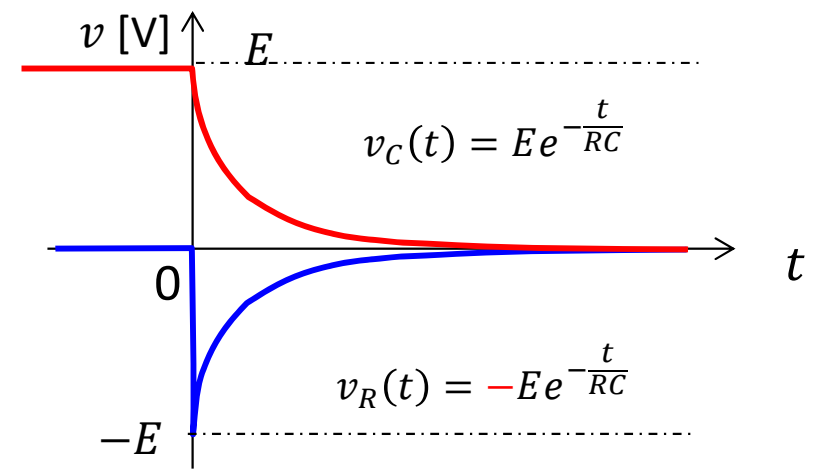
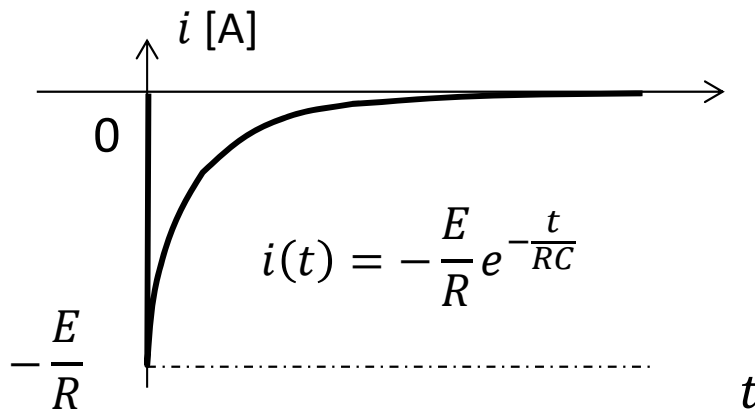
$$v_C(t) = \frac{1}{C} q(t) = E e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_R(t) = Ri(t) = -E e^{-\frac{t}{RC}}$$



キャパシタが電源として作用するため
 流れる



$i(t)$ は E を0にした直後に**急激に**逆方向に流れ、 $-E/R$ から していく。

定常状態では $v_C = E$ であり、 $v_R = 0$ である。電源電圧を時刻0で0にすると、抵抗両端に瞬時にキャパシタ電圧と の過渡電圧が表れ、徐々に減少していく

RC直列回路においても、過渡解には指数関数が表れ、過渡解は電源を した回路固有の時間応答の性質を持つ。

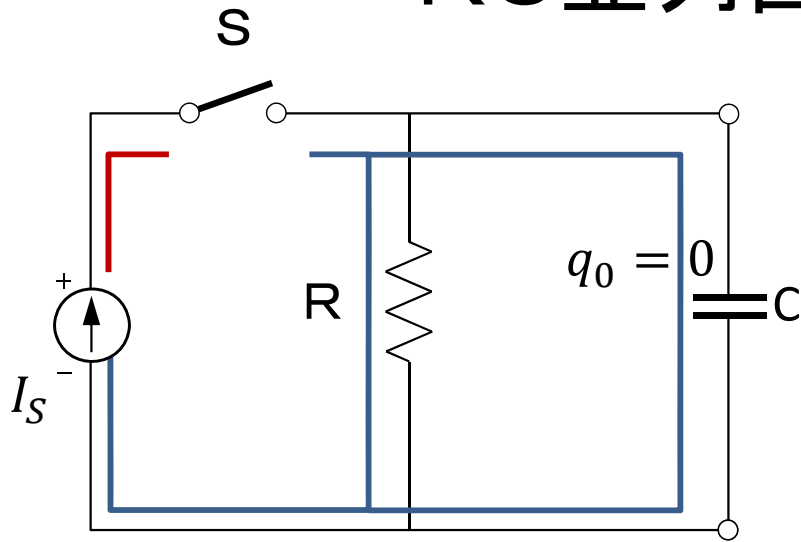
同様に、 $y(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$ に対応する τ を考えると以下が得られる。

$$\tau = RC = \frac{-1}{\text{特性方程式の固有値}}$$

これはRC回路での**時定数**であり、RL回路の場合と式は違うが である。抵抗やコンデンサの値が大きくなれば**時定数が大きくなり、充電、放電に** ことを意味する

直流電流源での動的解

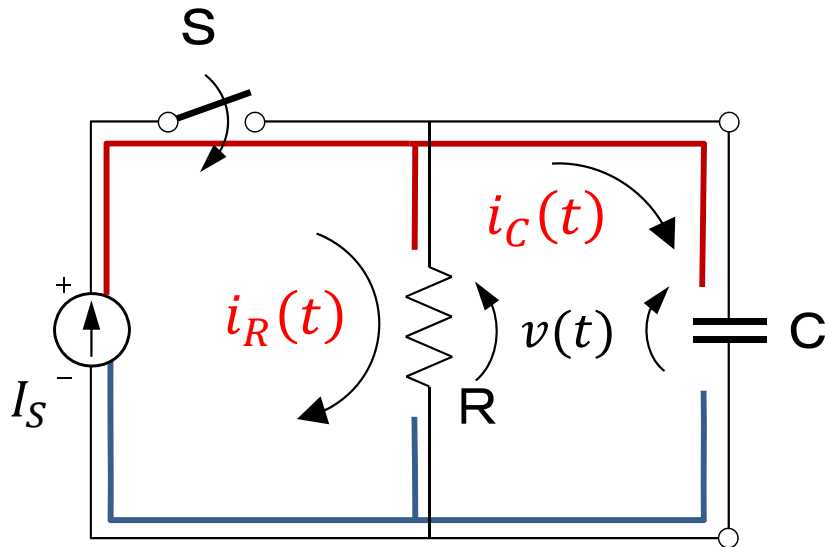
RC並列回路(直流電流源の場合)



スイッチSが開 → 回路に電流は流れない
電流源は一定の電流を流すので実際はありえない

初期電荷がないので、キャパシタや抵抗の端子間電圧は0

電源の一端子からスイッチまでの導体は



スイッチSが閉じたとき、回路に電流が流れ、抵抗、キャパシタには が発生する

抵抗には $v(t)$ に対応した電流 $i_R(t)$ が流れる

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R}$$

キャパシタには $v(t)$ に対応した電流 $i_C(t)$

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

キルヒホッフの電流則 $I_S = i_R(t) + i_C(t)$ より

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} = I_S$$

これは1階の常微分方程式である。ステップ3での初期条件のためにキャパシタ電圧についての式を考える。

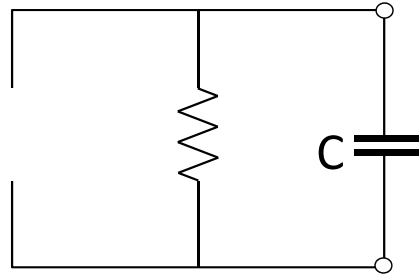
RC並列回路の解

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} = I_S$$

ステップ1

余関数は電源を0にしたときの解

→電流源では電流が流れてはいけな
いので、電流源は
開放除去



$v_t(t) = Ke^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$C\lambda + \frac{1}{R} = 0$$

したがって、固有値 λ_0 は

$$\lambda_0 = -\frac{1}{RC}$$

よって、余関数は

$$v_t(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

ステップ2

直流電源なので、特殊解も時間によらず
一定値となり、定常状態の電圧から

$$v_s(t) = RI_S$$

ステップ3

一般解 $v(t)$ は

$$v(t) = RI_S + Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

キャパシタ電圧が連続となる条件から、
 より

$$K = -RI_S$$

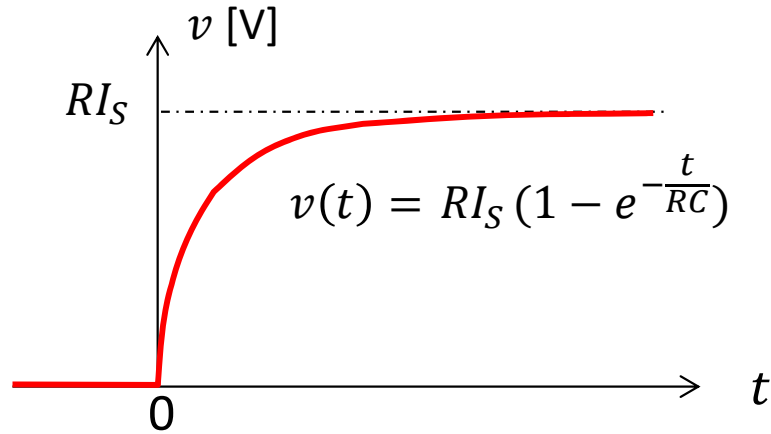
よって、

$$v(t) = RI_S (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

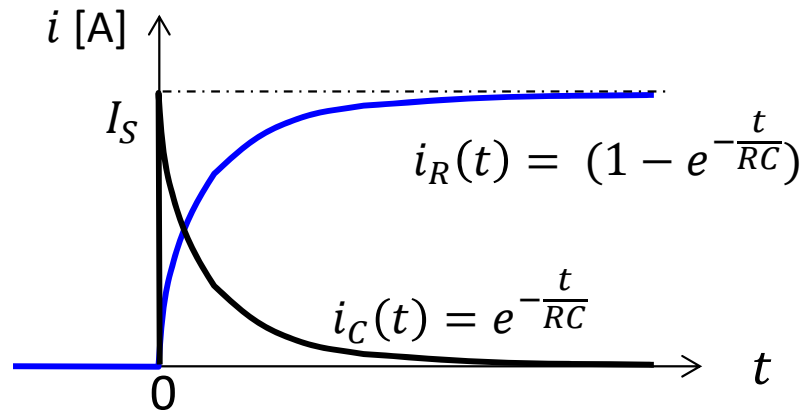
$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = I_S (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = I_S e^{-\frac{t}{RC}}$$

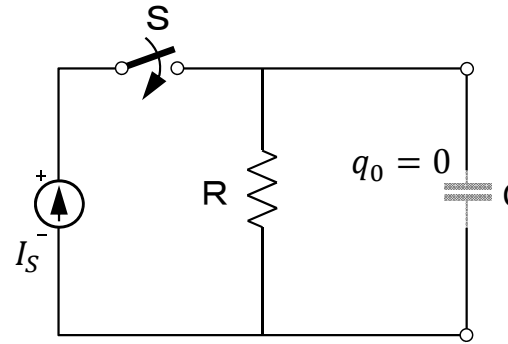
RC並列回路の動的挙動



回路の電圧はスイッチを入れたのち徐々に上昇し、 RI_S に漸近していく。

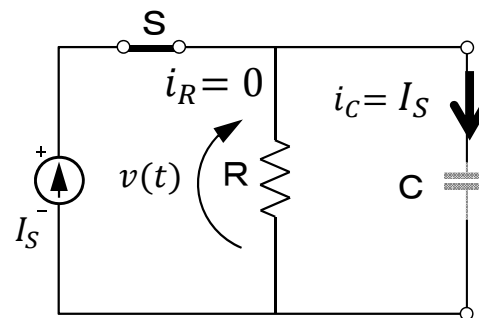


スイッチを入れた後、電流は瞬時に流れ、徐々に低下しながら0に漸近していく。



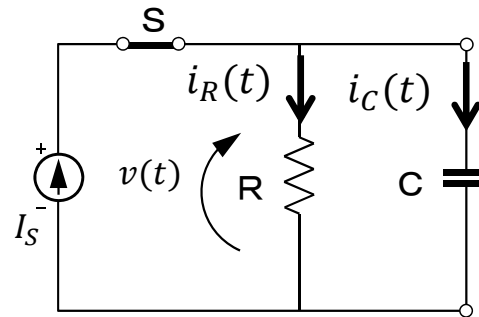
スイッチを閉じる前

初期電荷が0なので、 v_C が0であり、と等価



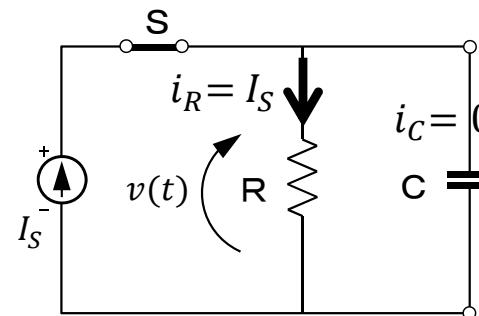
スイッチを閉じた直後

キャパシタ電圧は急変しないので、 $v_C(t) = 0 = v(t)$ 、抵抗の電流が0なので、に瞬時にすべての電流 I_S が流れる。



過渡状態

電荷がチャージされ、 $v_C(t)$ が増加すると、 $v_R(t) = v_C(t)$ より抵抗に電流が分流される

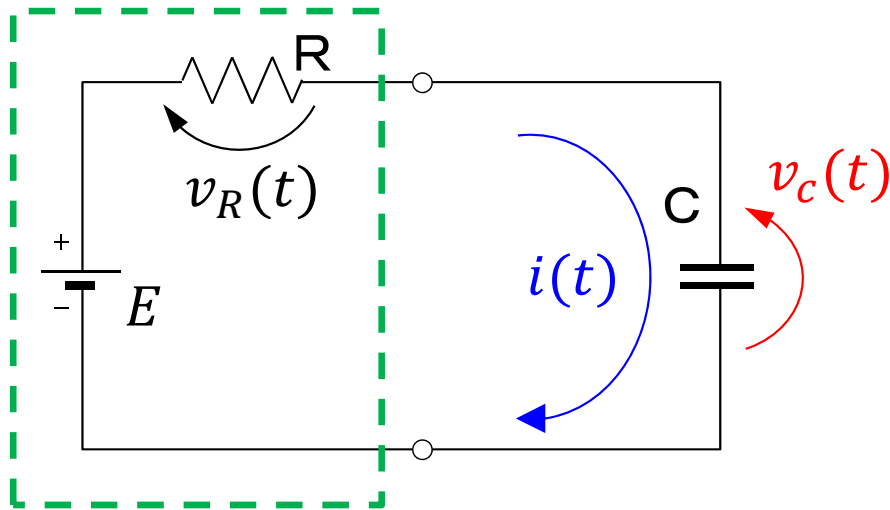


定常状態

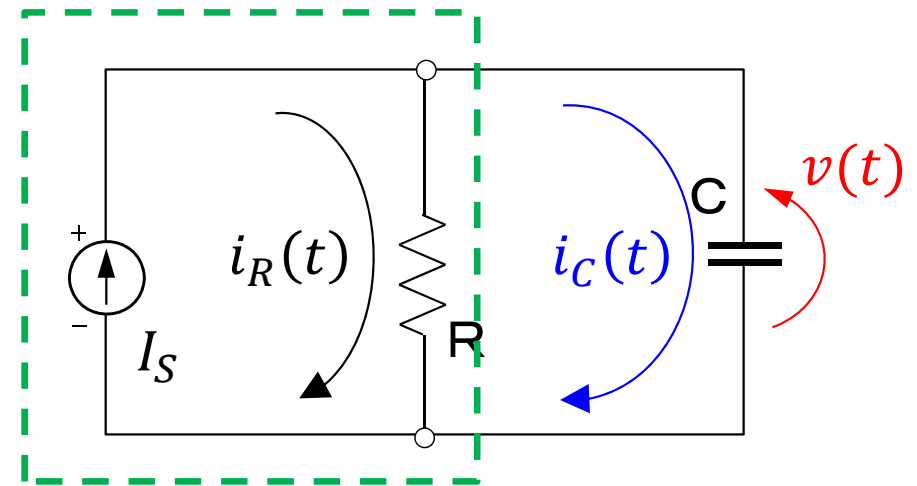
キャパシタが充電されると 電流が0となり、抵抗に全電流が流れる

電圧源と電流源

RC直列電圧源回路



RC並列電流源回路



$$v_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \longleftrightarrow v(t) = RI_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \longleftrightarrow i_C(t) = I_S e^{-\frac{t}{RC}}$$

~~$$v_R(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}} \longleftrightarrow i_R(t) = I_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$~~

理想電圧源 E と内部抵抗 R の直列接続

$E = RI_S$
をみたす電源に変換可

理想電流源 I_S と内部抵抗 R の並列接続

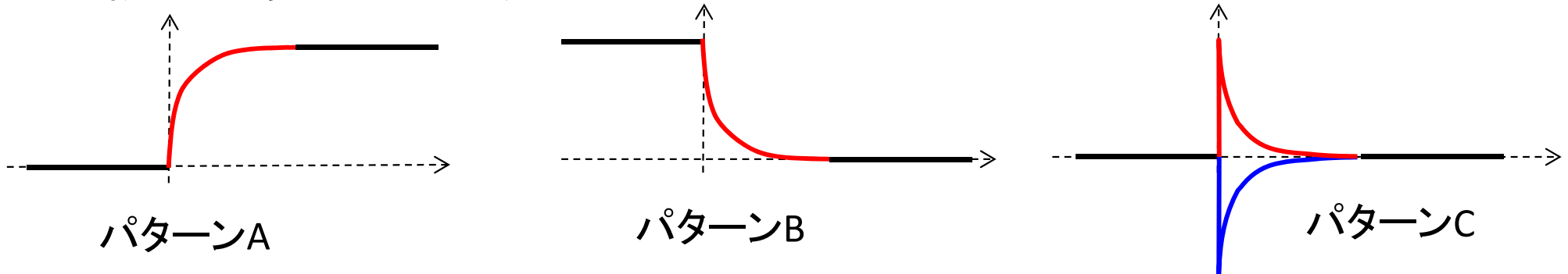
負荷の電流、電圧に対して両者が等価

RL,RC直流回路の動的挙動の直観的理解

直観的理解のためのヒント

過渡解は常に $y(t) = \pm K e^{-\frac{t}{\tau}}$ の形 (過渡状態は指数関数的に変化)
過渡状態の後、定常状態になる (コンデンサ → 、コイル →)

1. 初期状態の動的素子の電圧、電流を定める
2. 定常状態の動的素子の電圧、電流を求める
3. 初期状態から定常状態への変化が、急激な変化から緩やかな変化になるようにつなげる



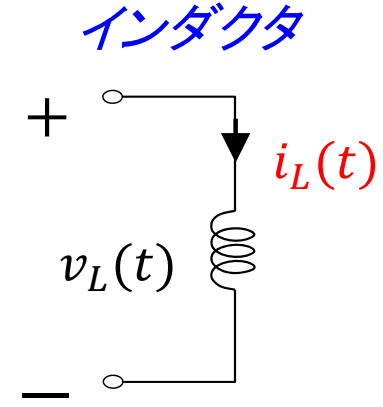
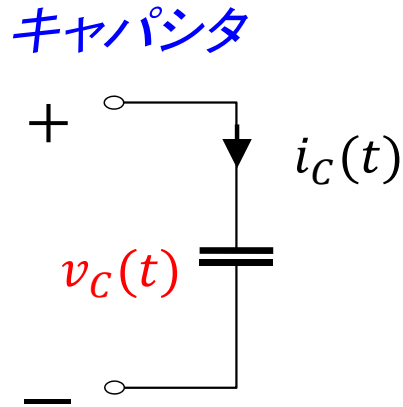
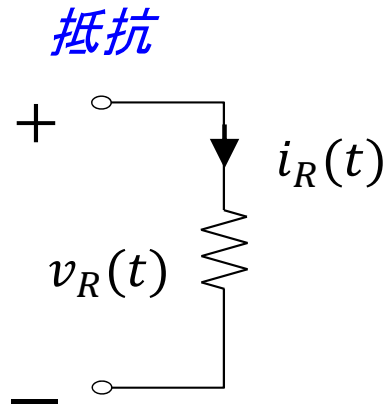
4. 過渡現象を起こさない動的素子に注意

電圧源の負荷に につながる抵抗に流れる電流
電流源の負荷に につながる抵抗の電圧

5. 解析不能な動的素子にも注意

電圧源に並列につながる 素子 → 電圧源が ∞ の電流を流す X
電流源に直列につながる 素子 → 電流源が ∞ の起電力を起こす X

直流回路の動的挙動を推測する際の基本



あらゆる時間で満たすべき基本特性

・電圧は電流に比例

- ・電流の時間積分が
- ・電荷に比例したキャパシタ電圧

- ・電圧の時間積分が
- ・鎖交磁束に比例した電流

t=0以前に成立

R-1 電流の流れない抵抗は と等価

C-1 電荷のないキャパシタは と等価、 $q = Cv_C$

L-1 鎖交磁束のないインダクタは と等価、 $\phi = Li_L$

t=0に成立

C-2 キャパシタ は連続

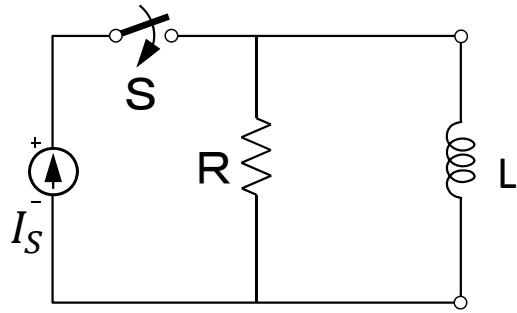
L-2 インダクタ は連続

定常状態の条件

C-3 電流0、電圧が一定(充電済みキャパシタ)は と等価

L-3 電圧0、電流一定の状態では と等価

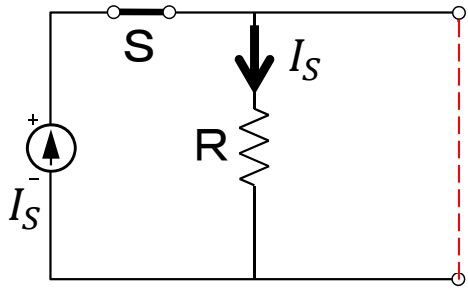
RL並列回路(直流電流源)の動的挙動の推測



スイッチ閉じる前は

各素子の電流、電圧とも0とする(初期値の条件)

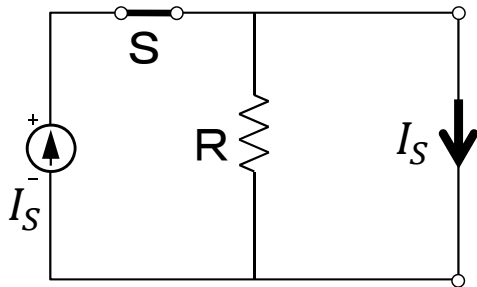
$$i_L(0^-) = i_R(0^-) = v(0^-) = 0$$



スイッチ閉じた直後は、

L-2の条件より $i_L(0^+) = 0$

抵抗に全電流が流れる $i_R(0^+) = I_S$ $v(0^+) = RI_S$



定常状態では

L-3の条件よりインダクタの電流は I_S

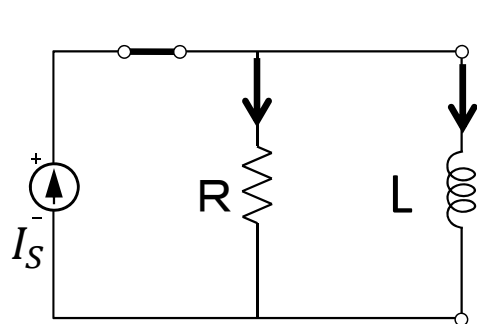
$$i_L(\infty) = I_S$$

したがって、抵抗の電流は0

$$i_R(\infty) = 0$$

したがって、端子間電圧も0

$$v(\infty) = 0$$



過渡状態では

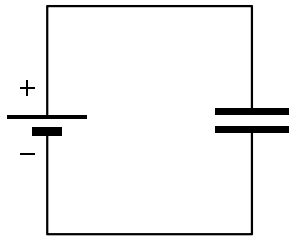
時定数 $\tau = L/R$ で初期状態から定常状態に遷移するので

$$i_L(t) = I_S (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

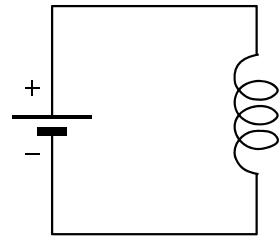
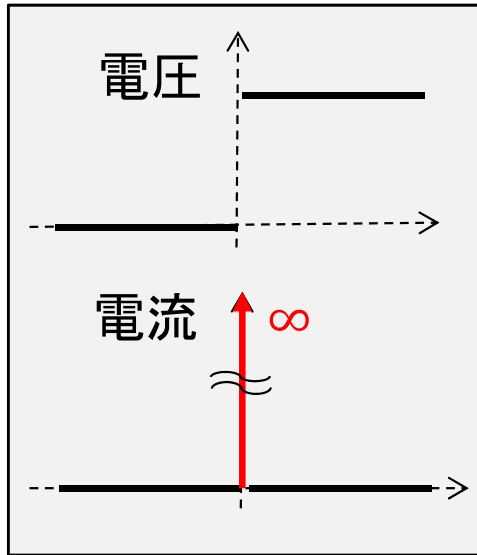
$$v(t) = RI_S e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_R(t) = I_S e^{-\frac{R}{L}t}$$

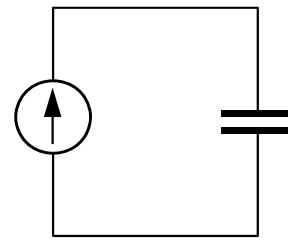
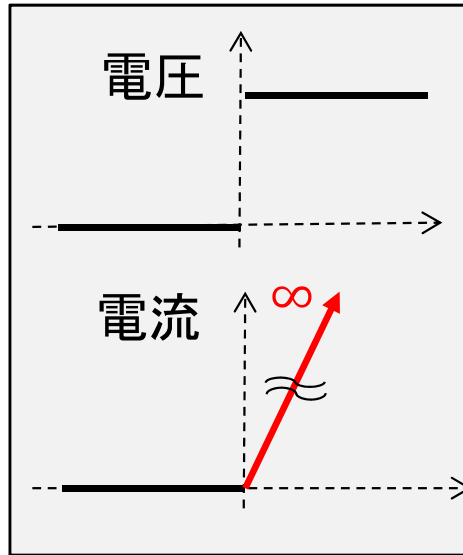
簡単な直流回路の動的挙動



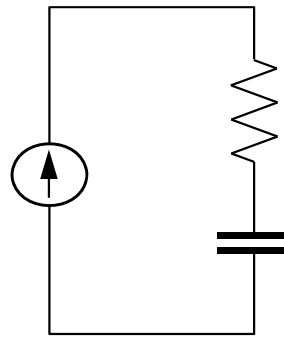
接続時に電流 ∞
C-1が影響



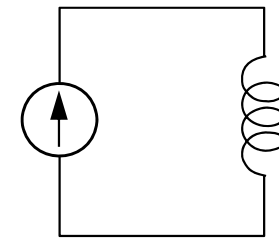
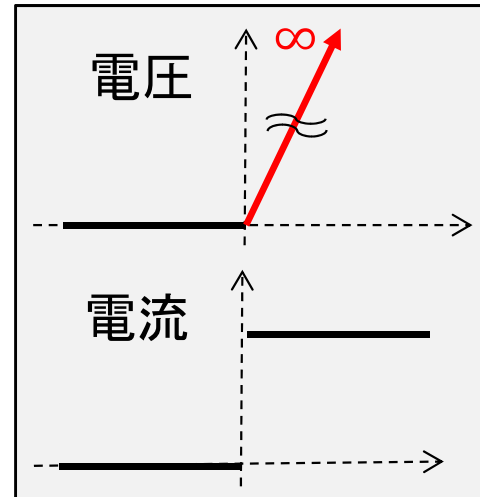
定常状態で電流 ∞
L-3が影響



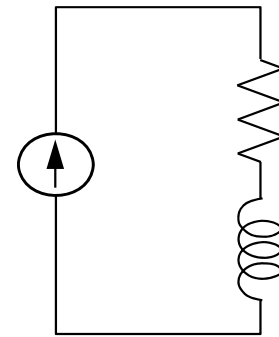
電流がどんどん流入して
定常状態にならない
キャパシタ電圧 $\rightarrow\infty$



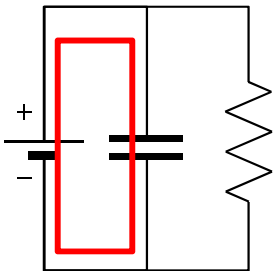
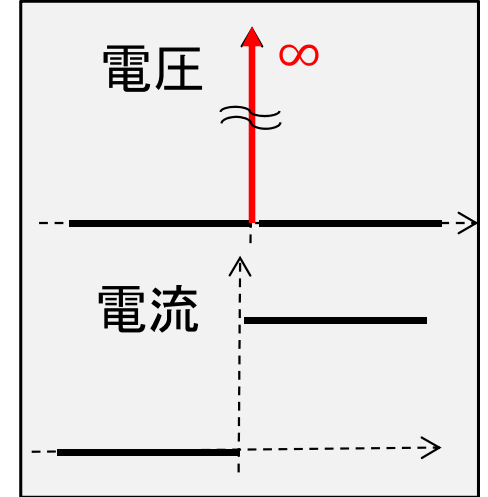
電流がどんどん流入して
定常状態にならない
キャパシタ電圧 $\rightarrow\infty$



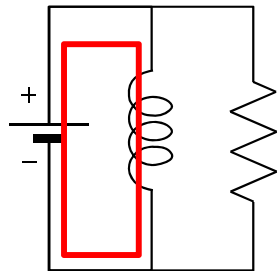
接続時に電流0
L-1が影響
インダクタ電圧 $\rightarrow\infty$



接続時に電流0
L-1が影響
インダクタ電圧 $\rightarrow\infty$



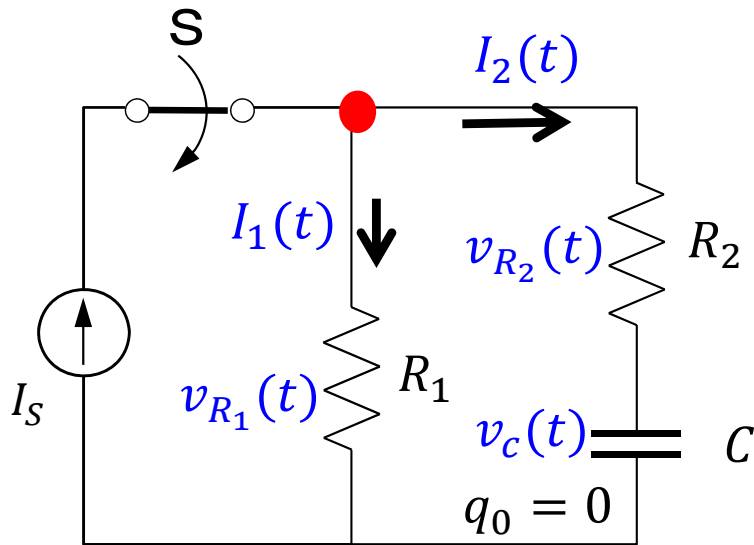
接続時にコンデンサ
の電流 ∞ 、C-1が影響



定常状態でコイルの
電流 ∞ 、L-3が影響

回路方程式による解答

2分岐した枝の各電流、動的素子3個の電圧の5個を未知数とする



- ① $I_s = I_1(t) + I_2(t)$ キルヒホッフ電流則
 - ② $v_{R_1}(t) = v_{R_2}(t) + v_c(t)$ キルヒホッフ電圧則
 - ③ $v_{R_1}(t) = I_1(t)R_1$
 - ④ $v_{R_2}(t) = I_2(t)R_2$
 - ⑤ $I_2(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$
- } 各動的素子毎のインピーダンス条件

未知数5個に式5個で必ず解ける。

コンデンサの微分があるので、 $v_c(t)$ に関する微分方程式を立てる

⑤より、 $I_2(t)$ と $v_c(t)$ との関係を導出

②に③、④を代入

$$I_1(t)R_1 = I_2(t)R_2 + v_c(t)$$

①を代入し、 I_1 を消去

$$\{I_s - I_2(t)\}R_1 = I_2(t)R_2 + v_c(t)$$

整理して

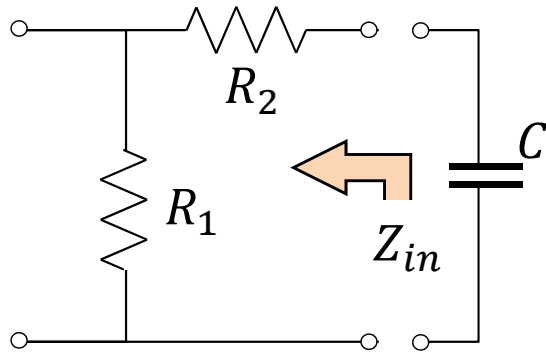
$$I_s R_1 = I_2(t)(R_1 + R_2) + v_c(t)$$

⑤式を代入し、 I_2 を消去

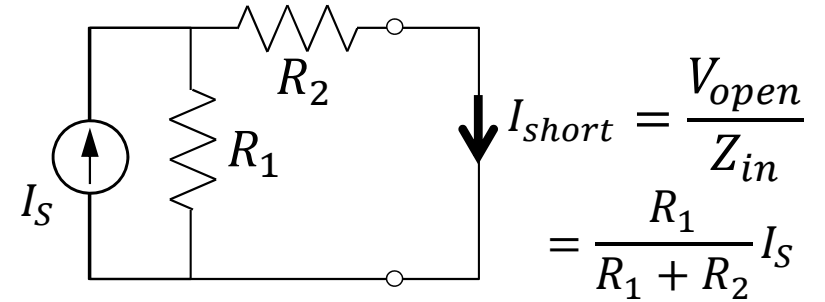
$$(R_1 + R_2)C \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = I_s R_1$$

電圧源RC直列回路、電流源RC並列回路への変換

端子から見た回路を、電圧源や電流源に置き換え



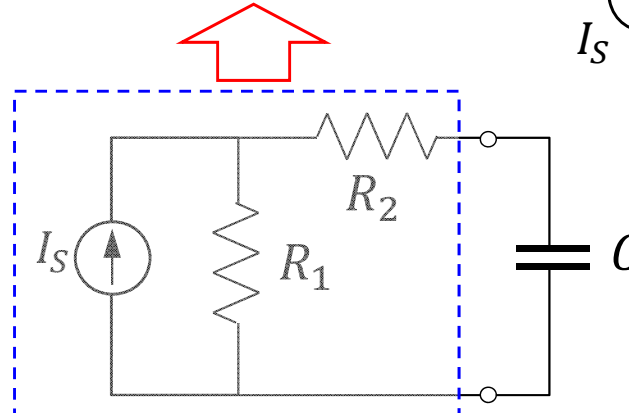
コンデンサを短絡除去したときの短絡電流 I_{short}



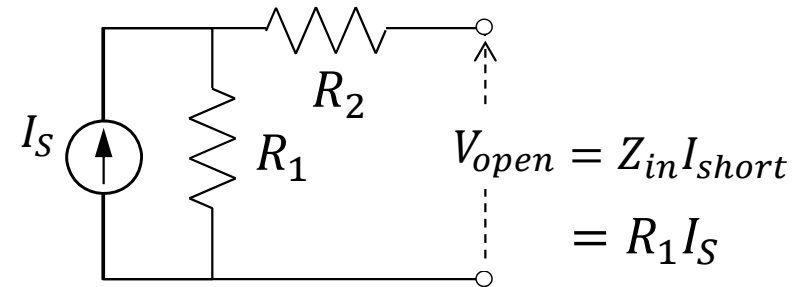
内部の電源を0としたときのコンデンサ側から見たインピーダンス Z_{in}

(理想電流源は開放除去、理想電圧源は短絡除去)

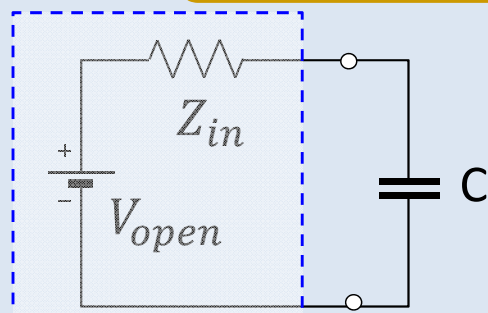
$$Z_{in} = R_1 + R_2$$



コンデンサを開放除去したときの開放電圧 V_{open}

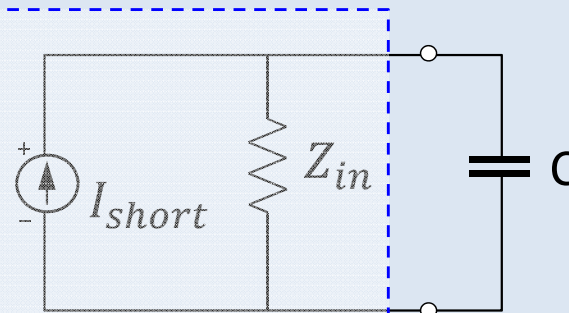


鳳 - テブナンの定理



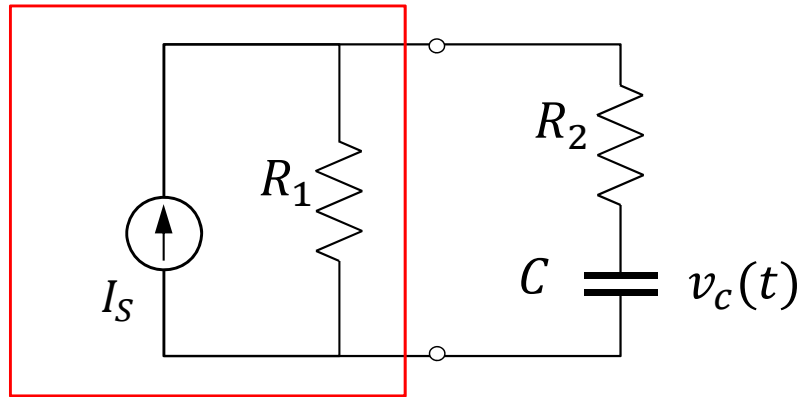
電圧源RC直列回路への変換

ノートの定理



電流源RC並列回路への変換

電圧源-電流源変換による解

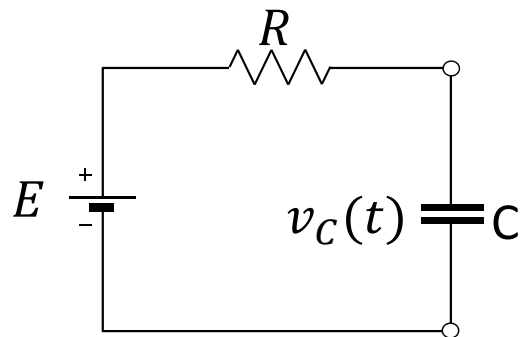
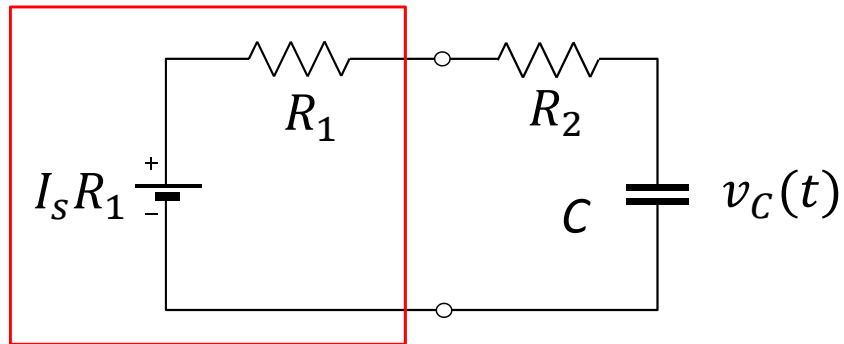


$$(R_1 + R_2)C \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = I_s R_1$$

RC直列回路の微分方程式の形と同じ



理想電流源と並列な抵抗を
理想電圧源と直列な抵抗に変換



この回路の微分方程式

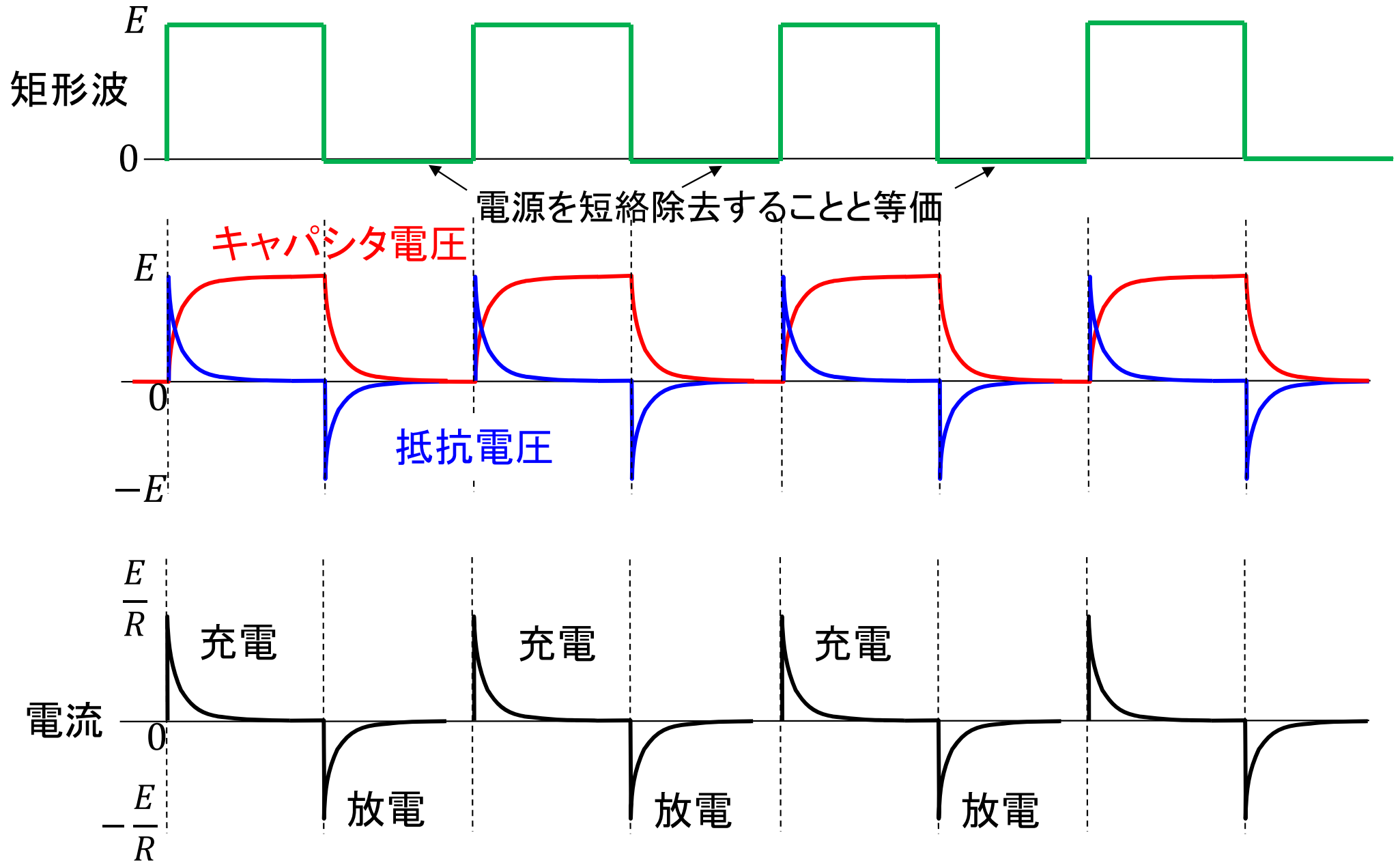
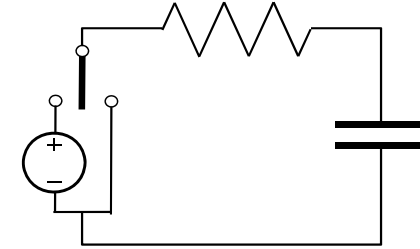
$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = E$$

$$E = I_s R_1$$

$$R = R_1 + R_2$$

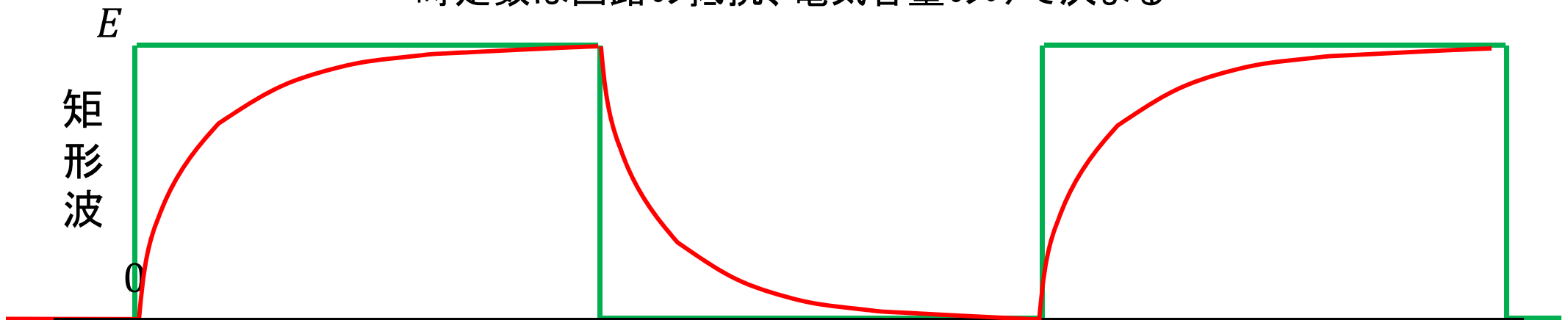
直流以外の電圧源での動的解

電源電圧が矩形波のとき (RC直列回路)

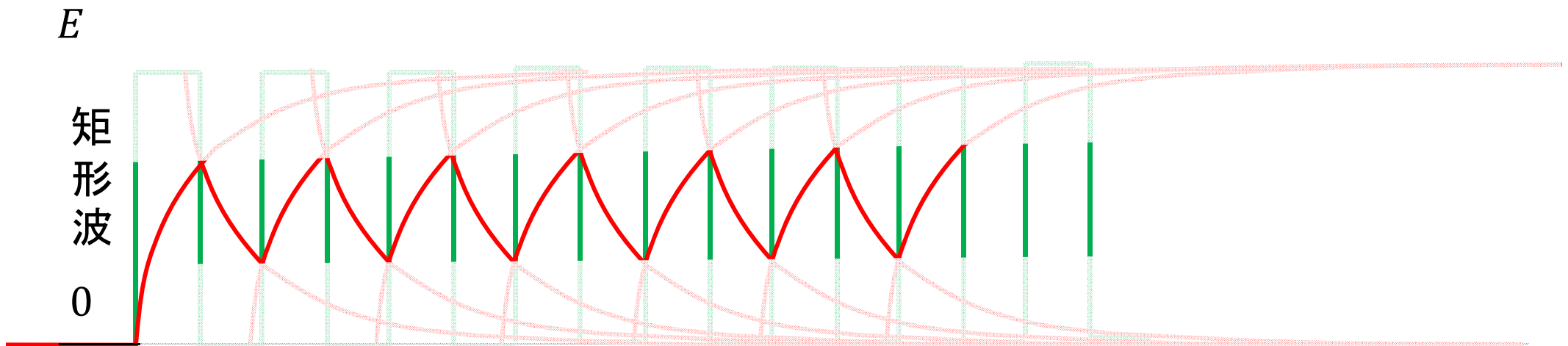


矩形波のパルス幅が変わったとき

時定数は回路の抵抗、電気容量のみで決まる



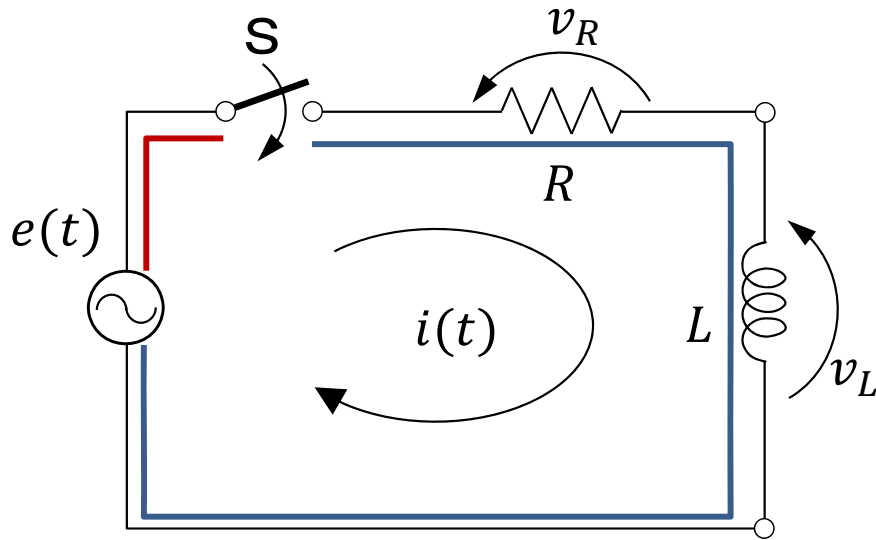
矩形波のパルス幅が短くなったらどうなるか？ (時定数は同じ)



電源On, Offによる過渡応答特性は同じだが、パルスの繰り返し毎に初期値が異なるため、全体の過渡応答は変わる。

さらにパルス幅を狭めると電圧値の低いときは **充電による電圧増加 > 放電による電圧低下** なので、**徐々に電圧が増加し、 $E/2$ を中心として増減を繰り返す**

電源電圧が正弦波の場合の動的解 (RL直列回路)



電源電圧に交流電源を考える

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \phi)$$

スイッチSを閉じたとき、回路に電流が流れる

キルヒホッフの電圧則 $e(t) = v_L(t) + v_R(t)$ より



微分方程式左辺は直流電源と同じなので余関数も同じ。

右辺が時間の関数なので、仮定する特殊解が



右辺の関数 (電源関数)	仮定する特殊解
定数 A	定数 k
$Be^{\lambda t}$	$ke^{\lambda t}$
$\cos \omega t$ $\sin \omega t$	$f \sin \omega t + g \cos \omega t$
t^m	$k_m t^m + k_{m-1} t^{m-1} + \dots + k_1 t + k_0$
$te^{-\alpha t}$	$(k_1 t + k_0) e^{-\alpha t}$

電源電圧が正弦波の場合の動的解 (RL直列回路)

正弦振動する関数は、オイラーの式を使って指数関数で取り扱えると便利

$$E_m \sin(\omega t + \phi) = \text{Im}[E_m e^{j\omega t + \phi}] = \text{Im}[\dot{E}_m e^{j\omega t}]$$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

ここで、 $\dot{E}_m = E_m e^{j\phi}$ は複素数であり、 $\text{Im}[\]$ は複素数の を意味する

電源以外に はないため、以下の微分方程の解 $i(t)$ の虚部が $E_m \sin(\omega t + \phi)$ に対応する解になる

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = \dot{E}_m e^{j\omega t} \quad \leftarrow \quad L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E_m \{ \cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi) \}$$

表から、特殊解は $i_s(t) = \dot{k} e^{j\omega t}$ で表されるため、代入すると

$$(j\omega L + R)\dot{k} e^{j\omega t} = \dot{E}_m e^{j\omega t}$$

この式がすべての時間に成立するためには

$$\dot{k} = \frac{\dot{E}_m}{j\omega L + R} = \frac{E_m e^{j\phi}}{Z e^{j\gamma}} = \frac{E_m}{Z} e^{j(\phi - \gamma)}$$

ここで

$$Z = \sqrt{(\omega L)^2 + R^2}, \quad \gamma = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

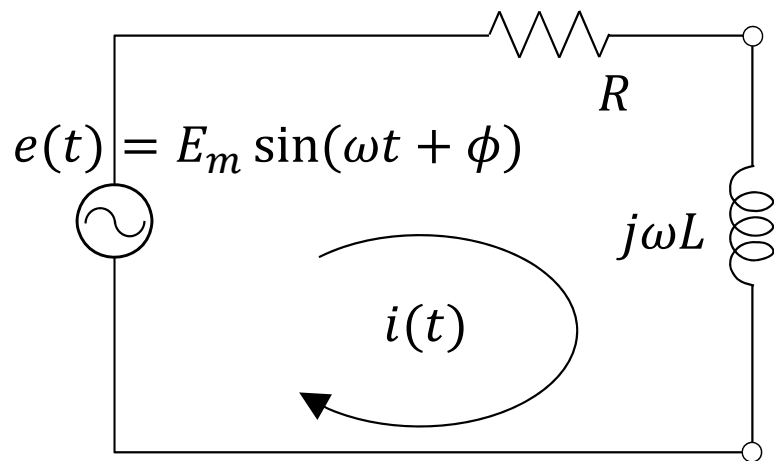
したがって、特殊解の虚部を取れば

$$i_s(t) = \text{Im}[\dot{k} e^{j\omega t}] = \text{Im}\left[\frac{E_m}{Z} e^{j(\phi - \gamma)} e^{j\omega t} \right]$$

これまでの議論では特殊解は定常状態での解を表していた。

この場合も定常状態で電流が、振幅 $\frac{E_m}{Z}$ 、位相 $\phi - \gamma$ で正弦振動することを表しているだろうか？

特殊解と定常解 (RL直列回路)



左の図において、回路に流れる **定常電流** を考える。

インピーダンスは $Z = R + j\omega L$ より、大きさは

$$|Z| = \sqrt{(\omega L)^2 + R^2}$$

であり、電流の大きさは $\frac{E_m}{|Z|}$ である。

インピーダンスの位相は $\gamma = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$

コイルは電流の位相を遅らせるため $\phi - \gamma$

すなわち、この場合も **特殊解は定常状態での解と等価** である。

から特殊解を得てもよい

一方、余関数は(直流回路の結果から) $i_t(t) = e^{-\frac{R}{L}t}$ より、一般解は未知数 K を用いて

$$i(t) = K e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_m}{Z} \sin(\omega t + \phi - \gamma)$$

初期条件は $i(0^+) = i(0^-) = 0$ より

$$K = -\frac{E_m}{Z} \sin(\phi - \gamma)$$

したがって、電流の一般解は

$$i(t) = \frac{E_m}{Z} \left\{ \sin(\omega t + \phi - \gamma) - \sin(\phi - \gamma) e^{-\frac{R}{L}t} \right\}$$

電源電圧が正弦波の場合の動的挙動 (RL直列回路)

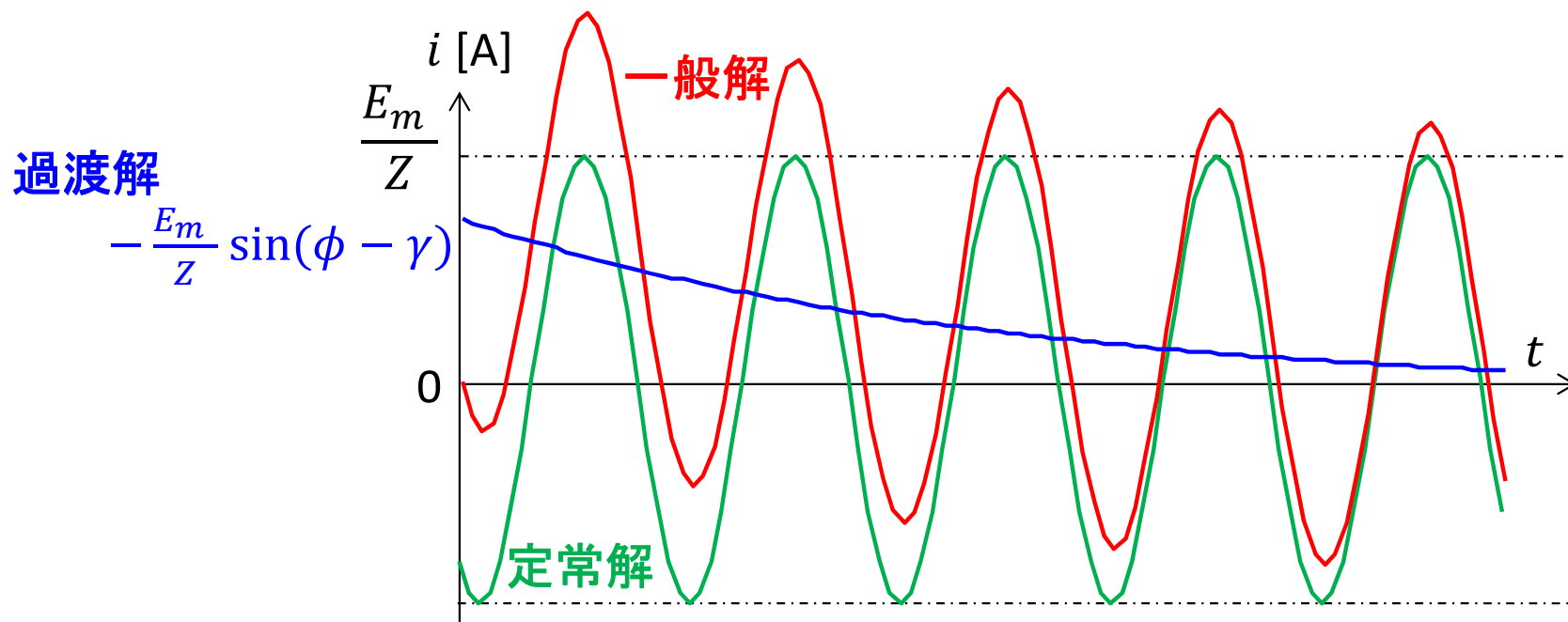
$$i(t) = \frac{E_m}{Z} \left\{ \underbrace{\sin(\omega t + \phi - \gamma)}_{\text{定常解}} - \underbrace{\sin(\phi - \gamma) e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{過渡解}} \right\}$$

定常解

過渡解

時間的に角周波数 ω で変動する
位相が $\phi - \gamma$ で表される

時定数 L/R で指数関数的に する
 ϕ と γ が同じであれば、過渡解は0



スイッチを閉じた瞬間から回路には外力(電源電圧)に依存する動作が始まる。
また、同時にその回路固有の動作も始めるが、
この動作はスイッチを 、時間とともに消滅する

R、L、C直列回路の動的解

n階の定係数常微分方程式の解法

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = f(t)$$

n は任意の整数、 $a_0 \dots a_n$ は任意の定数である。
この微分方程式を満足する $y(t)$ を求める

($n = 2$ の場合)

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = f(t)$$

この2階微分方程式の解も、微分方程式右辺を0としたときの解 $y_t(t)$ (余関数) と特殊解 $y_s(t)$ の和で表される。

一般解 $y(t) =$

ステップ1

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = 0$$

を任意の時刻において満たす解として、

$$y_t(t) =$$

代入すると

$$\{a_0 m^2 + a_1 m + a_2\} A e^{mt} = 0$$

から特性方程式が導かれ

$$a_0 m^2 + a_1 m + a_2 = 0$$

この解(固有値)は判定式

$$D =$$

の符号により分類できる

(i) $D <> 0$ 固有値が異なる値 m_1, m_2 を持つ場合 **余関数の線形結合**

$$y_t(t) =$$

(ii) $D = 0$ 固有値が重根 m_0 の場合

$$y_t(t) =$$

ステップ2

特殊解 $y_s(t)$ は、物理的には右辺を電源波形とし、回路を励振したときの定常解。

- ・交流理論から定常解を求める
- ・特殊解の形状を仮定して未定係数法で解く

n階の定係数常微分方程式の解法

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = f(t)$$

($n \geq 3$ の場合)

一般解は $y(t) = y_t(t) + y_s(t)$ と表される。

ステップ1

余関数 $y_t(t) = Ae^{mt}$

を微分方程式右辺=0に代入すると、

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

m に関する n 次方程式であり、最大で n 個の根が存在する。

(i) 固有値が全て異なる場合 (m_1, m_2, \dots, m_n)

$$y_t(t) =$$

(ii) 固有値に r 個の重根が含まれる場合

(m_1, m_2, \dots, m_{n-r} , および m_0 の r 重根)

$$y_t(t) = A_1 e^{m_1 t} + A_2 e^{m_2 t} + \dots + A_{n-r} e^{m_{n-r} t}$$

+

ステップ2

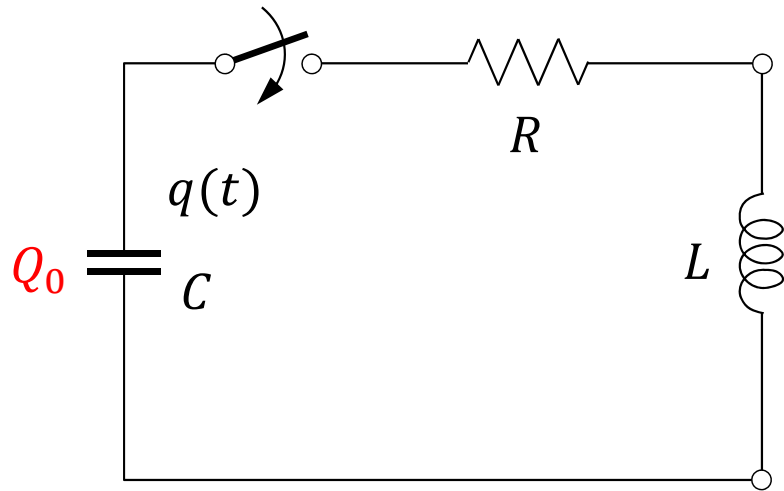
特殊解 $y_s(t)$ は、回路から定常解を求めるか、未定係数法で解く。

ステップ3

得られた一般解の余関数の線形結合には一般に が含まれる。

これらの値を決定するには、回路図に立ち返る必要があり、問題から初期時刻における、動的素子に関する独立な n 個の初期条件を見つける必要がある。

RLC直列回路の動的解析

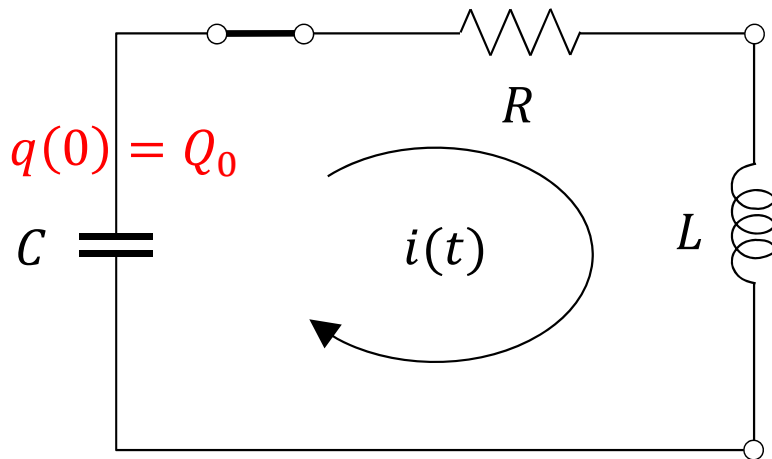


電源のないRLC直列回路を考える。尚、スイッチを閉じる前にコンデンサには電荷 Q_0 がたまっている

スイッチを閉じるとコンデンサの電荷が移動し、電流が流れる。この回路方程式はキルヒホッフの電圧則 $v_C(t) + v_L(t) + v_R(t) = 0$ から

$$\frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0$$

スイッチを閉じた直後



ここで、 $i(t) = dq(t)/dt$ より、

$$\frac{1}{C} q(t) + L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} = 0$$

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$$

$$\lambda_0 = \frac{R}{2L} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{とおき、}$$

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{LC} = 0$$

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + 2\lambda_0 \frac{dq(t)}{dt} + \omega_0^2 q(t) = 0$$

の解を考える 特殊解は0なので余関数が一般解

RLC直列回路の動的解(余関数)

余関数の形を $q(t) = Ae^{\lambda t}$

とすると、特性方程式は

$$\lambda^2 + 2\lambda_0\lambda + \omega_0^2 = 0$$

特性方程式の解

固有値

$$\lambda =$$

判別式

$$D =$$

したがって、余関数の形は、**右の2個に決まる** $e^{-(\lambda_0 - \sqrt{D})t}$ $e^{-(\lambda_0 + \sqrt{D})t}$

これらの線形結合により、余関数 $q(t)$ が決まり、 D により場合分けが必要

i) $D \neq 0$ のとき 固有値は二つ

$$q(t) = A_1 e^{-(\lambda_0 - \sqrt{D})t} + A_2 e^{-(\lambda_0 + \sqrt{D})t}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$=$$

ii) $D = 0$ のとき 固有値が**負の**重根

$$q(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\lambda_0 t}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$=$$

初期条件

スイッチを閉じた直後の等価回路からコンデンサの初期電荷が $q(0) = Q_0$

インダクタに電流は流れておらず、 $i(0) = 0$

RLC直列回路の未定係数の導出

i) $D \neq 0$ のとき

$$q(0) = A_1 + A_2 = Q_0$$

$$i(0) = (\lambda_0 - \sqrt{D})A_1 + (\lambda_0 + \sqrt{D})A_2 = 0$$

行列で表現すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_0 - \sqrt{D} & \lambda_0 + \sqrt{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii) $D = 0$ のとき

$$q(0) = A_1 = Q_0$$

$$i(0) = -\lambda_0 A_1 + A_2 = 0$$

行列で表現すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

クラメールの公式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ の解 } x, y \text{ は}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\text{分子は } \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \text{ を } \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ に置き換えた行列の行列式}}{\text{分母は行列式}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\text{分子は } \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ を } \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ に置き換えた行列の行列式}}{\text{分母は行列式}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

RLC直列回路の一般解

未定係数
 A_1, A_2 を解くと

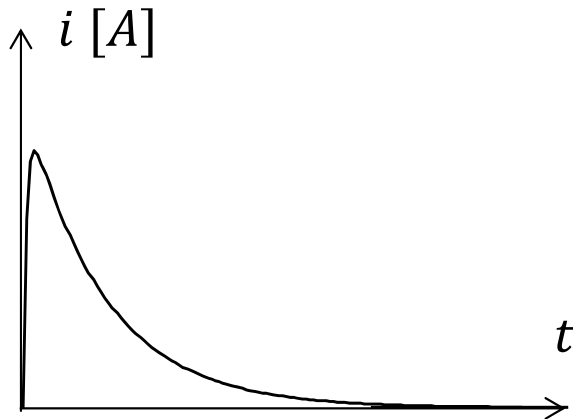
$$A_1 = \frac{Q_0(\lambda_0 + \sqrt{D})}{2\sqrt{D}} \quad A_2 = \frac{-Q_0(\lambda_0 - \sqrt{D})}{2\sqrt{D}}$$

判別式 $D = \lambda_0^2 - \omega_0^2$ より

(i) $D > 0$ ($\lambda_0 > \omega_0$) のとき

固有値が異なる**負の実数**

$$i(t) = \frac{Q_0\omega_0^2 e^{-\lambda_0 t}}{\sqrt{D}}$$



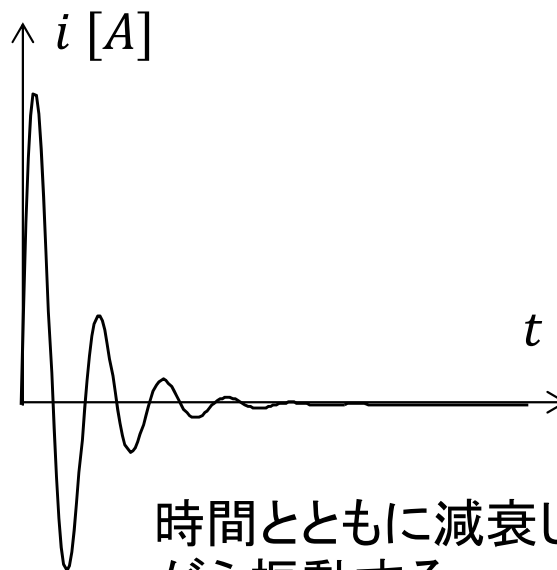
時間とともに減衰していく
単調に減衰

(ii) $D < 0$ ($\omega_0 > \lambda_0$) のとき

固有値が異なる**複素数**

$$i(t) = \frac{Q_0\omega_0^2 e^{-\lambda_0 t}}{\omega_d}$$

$$\omega_d = \sqrt{-D}$$



時間とともに減衰しながら振動する
振動的な過渡解

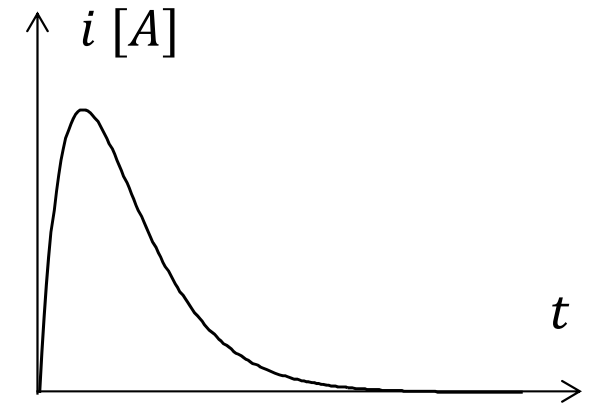
A_1, A_2 を解くと

$$A_1 = \frac{Q_0}{1 + \lambda_0} \quad A_2 = \frac{\lambda_0 Q_0}{1 + \lambda_0}$$

(iii) $D = 0$ ($\lambda_0 = \omega_0$)

固有値が**負の重根**

$$i(t) = Q_0\omega_0^2$$



時間とともに減衰していく

RLC回路の動的挙動(1)

解の減衰項にはすべて $e^{-\lambda_0 t}$ が入っている、 λ_0 が大きいほど、時間的に早く減衰する

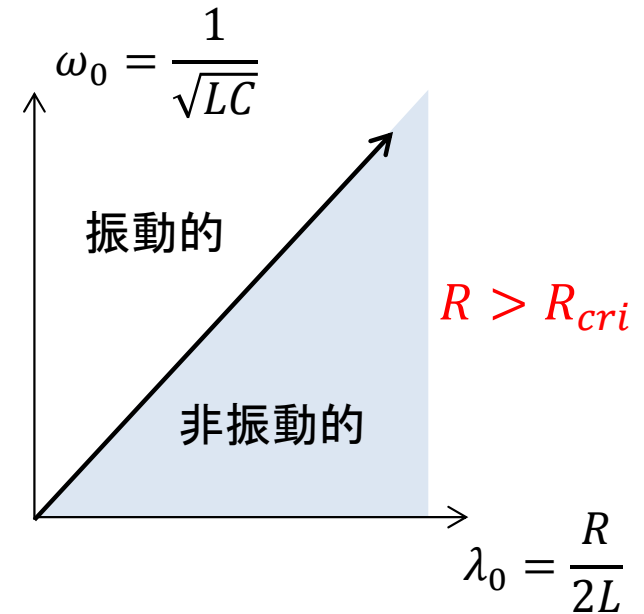
$$\lambda_0 = \frac{R}{2L}$$

単位は

また、 ω_0 も周波数の単位を持つ

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

また、 λ_0 や ω_0 は回路素子のパラメータによって、独立に定まる、 λ_0 、 ω_0 の軸を持つ平面を考えると



固有値が実数をもつ(すなわち、非振動的な過渡応答を示す)条件は

$$D = \lambda_0^2 - \omega_0^2 = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0 \quad \text{より} \quad \lambda_0 > \omega_0$$

ここで $D = 0$ ($\lambda_0 = \omega_0$) のときの抵抗値 $R_{cri} = \text{$ $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

R_{cri} は**臨界抵抗値**とよび、解の振動的、非振動的挙動の性質を決める要素となる

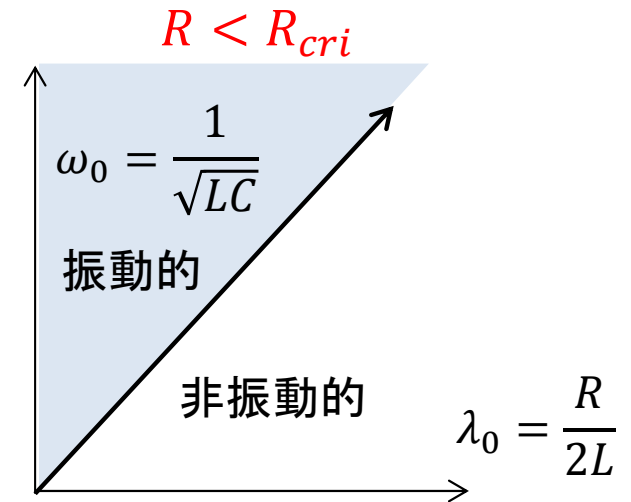
$R > R_{cri}$ のとき、RLC直列回路を流れる電流は非振動的で単調に減衰する。

RLC回路の動的挙動(2)

一方、 $\omega_0 > \lambda_0$ すなわち、抵抗が $R_{cri} = 2\sqrt{L/C}$ より小さければ、 していくことになる。

このとき、振動の角周波数 ω_d は

$$\omega_d = \sqrt{-D} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda_0^2} = \input{type="text"}$$



で決まるため、その過渡応答の振動周波数は電源電圧に無関係に によって定まる

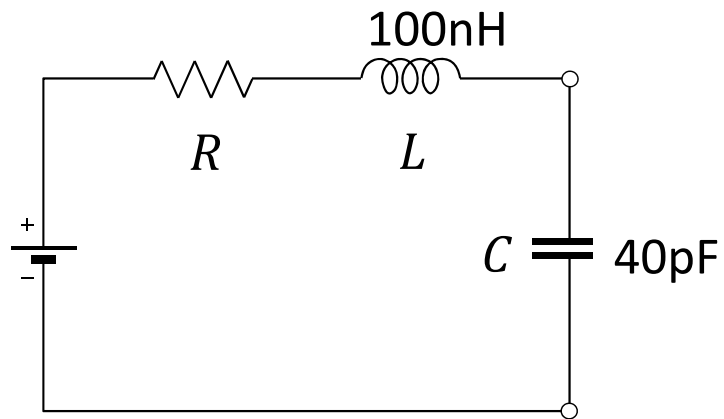
この振動はキャパシタの電気エネルギーとインダクタの磁気エネルギー間での、 による電流の振動を表している。

抵抗が0(LC直列回路)であれば減衰することなくいつまでも振動を続ける 状態になる。(周波数 $f_d = 1/2\pi\sqrt{LC}$)

抵抗が大きくなるにつれ、キャパシタ、インダクタ間の電流の往復の際に でエネルギーを失われていく

抵抗が $R_{cri} = 2\sqrt{L/C}$ より大きくなると、1回でエネルギーが多く失われ となる

RLC回路の動的挙動の例

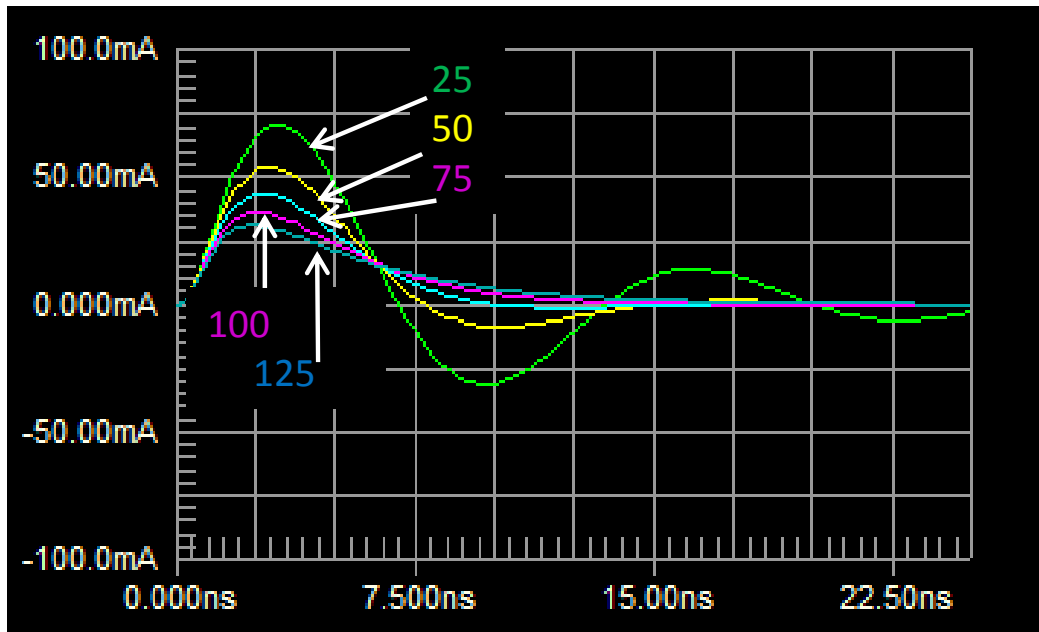


臨界抵抗値 $R_{cri} = 2\sqrt{L/C} = 100[\Omega]$

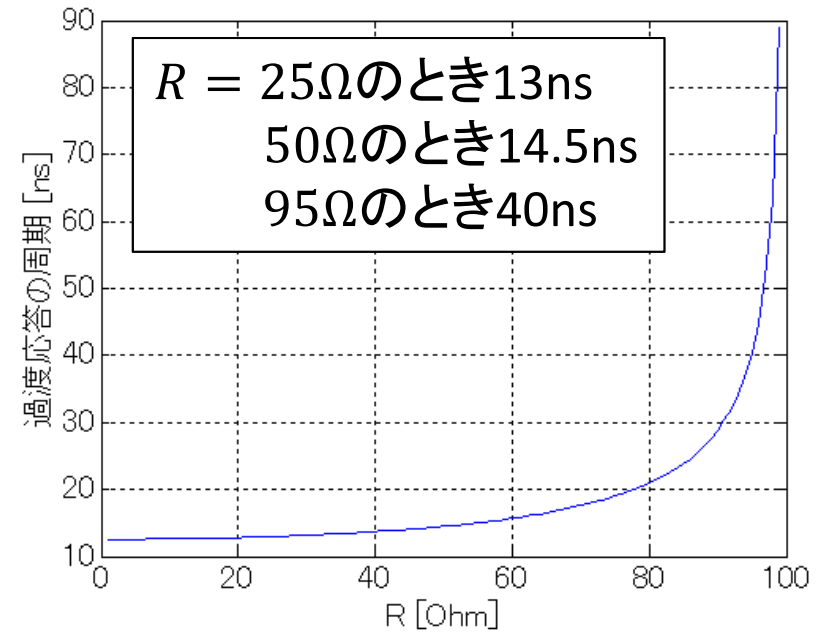
過渡応答の周波数 [Hz] $f_d = \frac{1}{4\pi L} \sqrt{R_{cri}^2 - R^2}$

$L > C$ のとき、 R_{cri} は大きくなり、振動を起こしやすい

$R_{cri} \gg R$ のとき $f_d \approx 1/2\pi\sqrt{LC}$ (共振状態)



抵抗値を変えたときの過渡応答
臨界抵抗 $R_{cri} = 100[\Omega]$



過渡応答の周期 $1/f_d$
 $R \rightarrow R_{cri}$ のとき、急激に長くなる

実在の素子に関して

等価回路モデル

抵抗



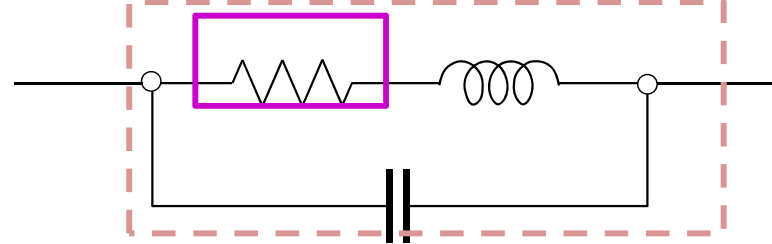
炭素被膜抵抗

<http://www.hobby-elec.org/>

端子につながる導線間が を持つ

導体は回路を構成すればコイルと等価なので
小さな 成分を持つ

抵抗に直列なインダクタンス、それに並列なコンデンサとしてモデル化できる。



コンデンサ



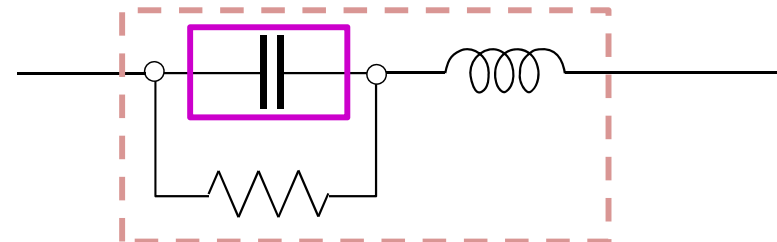
チップコンデンサ

電界コンデンサ

セラミックコンデンサ

極板間の絶縁抵抗は有限→極板間に が流れる
導体がインダクタンス成分を持つ

コンデンサに並列な漏れ抵抗、それに直列なインダクタンスとしてモデル化できる。



数100MHz以上の周波数では無視できない。

定格電力(使用電圧、電流の上限)

実在の抵抗、コンデンサ、インダクタには**定格電力**()が決
められている。

例えば、1/8W, 1/4W, 1/2Wなど。

定格電力を超えた電力を与えると発火の危険がある。

商用100 [V] 電源の定格800 [W] の電熱線ヒータ

$$\text{流れる電流は } 800 \text{ [w]} / 100 \text{ [V]} = \text{$$

$$\text{電熱線の抵抗は } 100 \text{ [V]} / 8 \text{ [A]} = \text{$$

電熱線の抵抗で消費されるエネルギーは熱に変わる

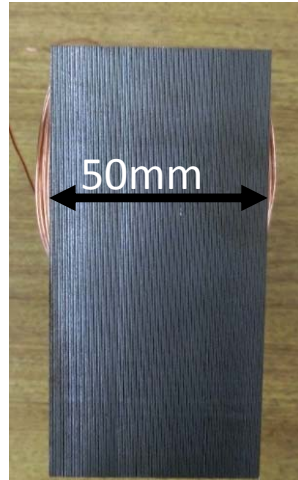
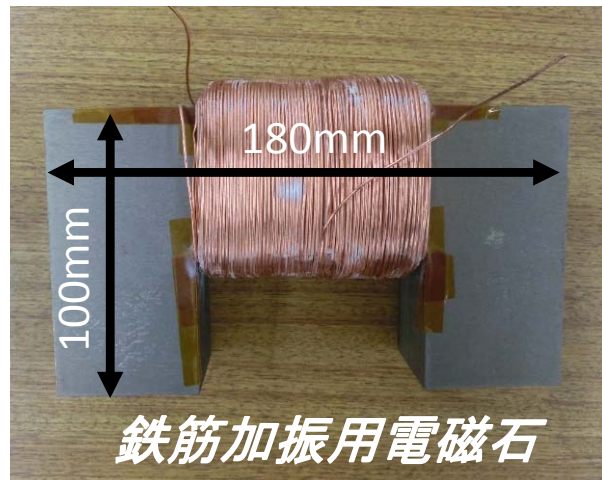
もし、 12.5Ω の抵抗器に8Aの電流を流せば

→ 800Wの電熱線ヒータ程度の熱が発生する。

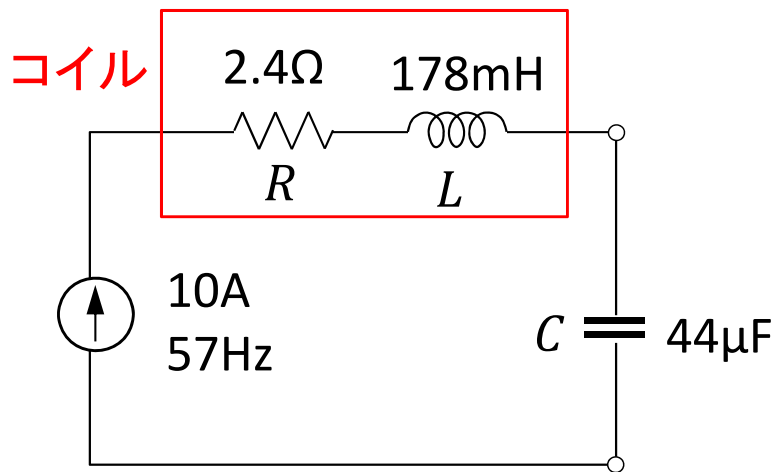
燃えて当然



電磁石駆動の例



エナメル線φ: 1[mm]
巻き数: 500回
リアクタンス L: 178mH
巻線抵抗 R: 2.4Ω



インピーダンス $|Z| = |R + j\omega L| = 63.8 [\Omega]$

電圧 $|V| = |ZI| = 638 [V]$

電源は10A, 638V → 6.4kWの電源が必要

1kWのバイポーラ電源(60万程度)で → 駆動できない

$f_d \approx 1/2\pi\sqrt{LC} \rightarrow C \approx \frac{1}{L(2\pi f_d)^2} = 43.8\mu F \rightarrow 44\mu F$ のコンデンサを直列に挿入

インピーダンス $|Z| = \left| R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right| = 2.4 [\Omega]$ 電圧 $|V| = |ZI| = 24 [V]$

電力 $|P| = |VI| = 240 [W]$

→ 1kWのバイポーラ電源で十分駆動可能

素子の非線形性

抵抗の抵抗値は温度に依存 → 抵抗の温度は電流に依存

→ 抵抗値が する

したがって、抵抗端の電圧と流れる電流は →

$$v_R(t) = R(i(t))i(t)$$

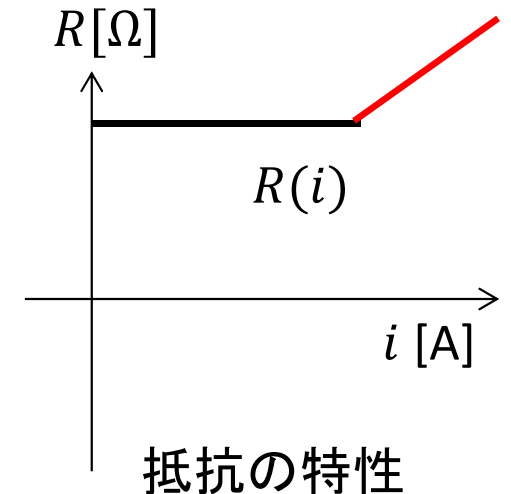
電流が多く流れている実在の抵抗の端子電圧と電流は

同様なことはコンデンサやコイルにも当てはまる。

実在の素子では線形な特性はある条件に限られることに注意。

浮遊容量や非線形性についてはその都度、 する。

重要なことは、理想的な素子の動特性を解析できるようにすること。



実在の電源に関して(電圧源と電流源)

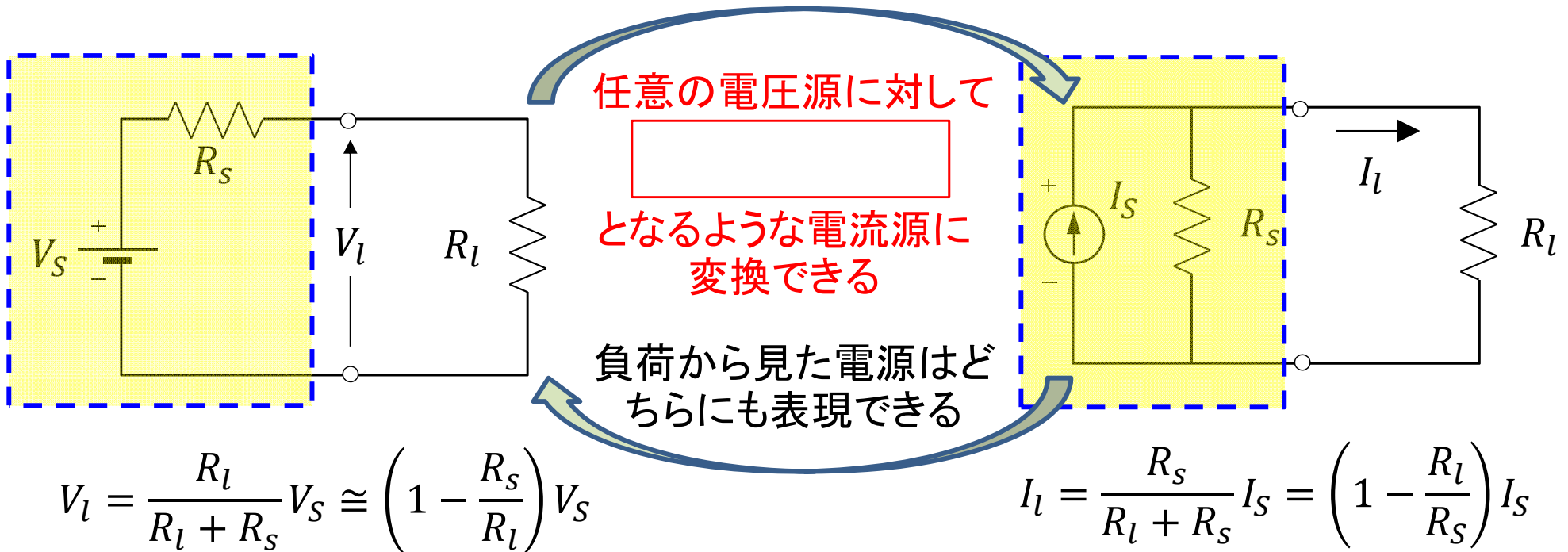
理想電圧源 → 負荷に関わらず
[] が一定

理想電流源 → 負荷に関わらず電
[] が一定

一般の電圧源は理想電圧源 V_S と内部
抵抗 R_S の [] 接続でモデル化できる

一般の電流源は理想電流源 I_S と内部
抵抗 R_S の [] 接続でモデル化できる

電源には電圧源と電流源の2種類に分けられる? → 両者は同じ



$R_S \ll R_l \rightarrow V_l = V_S$ (定電圧源)

$R_S \gg R_l \rightarrow I_l = I_S$ (定電流源)

負荷に対し、内部抵抗の十分小さい電源を []、十分大きい電源を [] と呼ぶ

素子の動的挙動まとめ

・抵抗 R

$$v_R(t) = Ri(t) \quad i(t) = \frac{1}{R}v_R(t)$$

・キャパシタ C

$$q(t) = Cv_c(t)$$

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{T_1}^t i(\tau) d\tau$$

キャパシタ電圧は急変しない。

・インダクタ L

$$\psi(t) = Li(t)$$

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_{T_1}^t v_L(\tau) d\tau$$

インダクタ電流は急変しない。