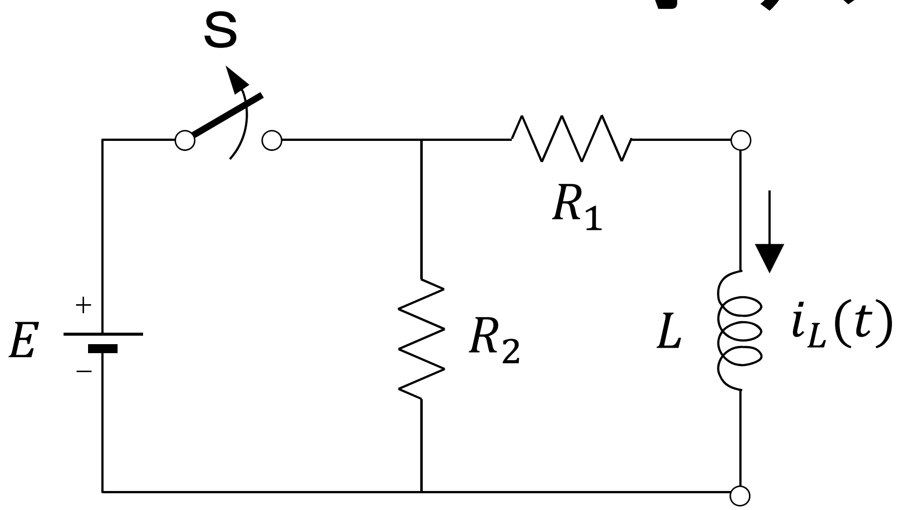
小テスト（2）



左図の回路においてスイッチSを閉じ、十分時間が経った定常状態を考える

$t=0^+$でスイッチを開けるとき、以下の問いに答えよ。

（1） $t=0^-$での電圧値$v_L(0^-)$を求めよ。（インダクタ電流が一定であることに注意）

（2） $t=0^-$での電流値$i_L(0^-)$を求めよ。（定常状態でのインダクタの等価回路を考慮）

（3） $t=0^+$での電流値$i_L(0^+)$を求めよ。（インダクタ電流は急変しない）

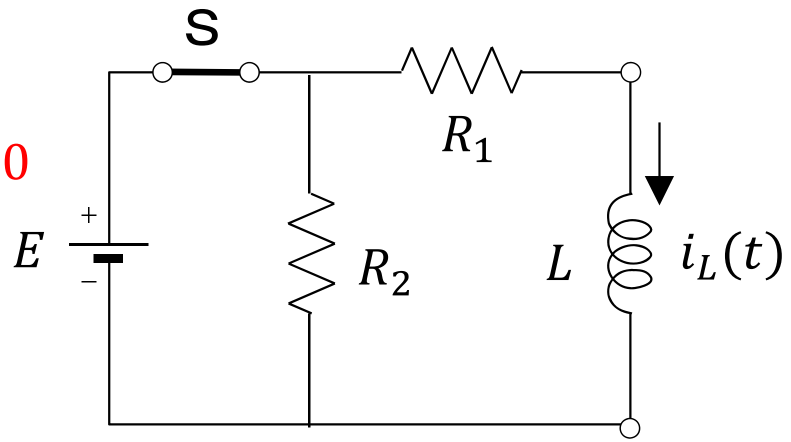
（4） $t\geq 0^+$での回路の微分方程式を$i_L(t)$を用いて表せ。（スイッチを開けるので電源がなくなることと等価）

（5） 微分方程式の余関数$i_t(t)$を求めよ

（6） 微分方程式の特殊解$i_s(t)$を求めよ

（7） 微分方程式の一般解$i_L(t)$を求めよ

解答



（1） $t=0^-$での電圧値$v_L(0^-)$を求めよ

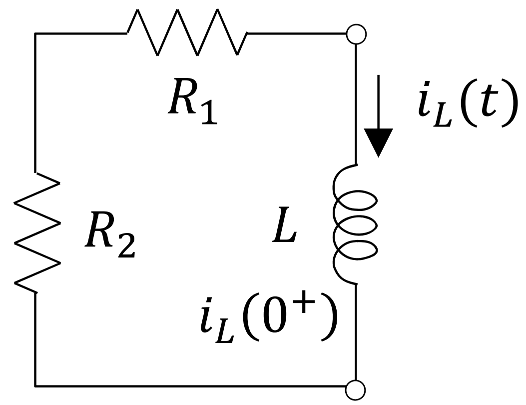
定常状態ではコイルは短絡と等価なので $v_L(0^-)=0$

（2） $t=0^-$での電流値$i_L(0^-)$を求めよ

R_1に電圧Eがかかるので$i_L(0^-)=E/R_1$

（3） $t=0^+$での電流値$i_L(0^+)$を求めよ

インダクタ電流は連続なので、$i_L(0^+)=i_L(0^-)=E/R_1$



（4） $t\geq 0^+$での回路の微分方程式を$i_L(t)$を用いて表せ

$$L\frac{di_L(t)}{dt}+(R_1+R_2)i_L(t)=0$$

（5） 微分方程式の余関数$i_t(t)$を求めよ

抵抗分がR_1+R_2なので　$i_t(t)=e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}$

（6） 微分方程式の特殊解$i_s(t)$を求めよ

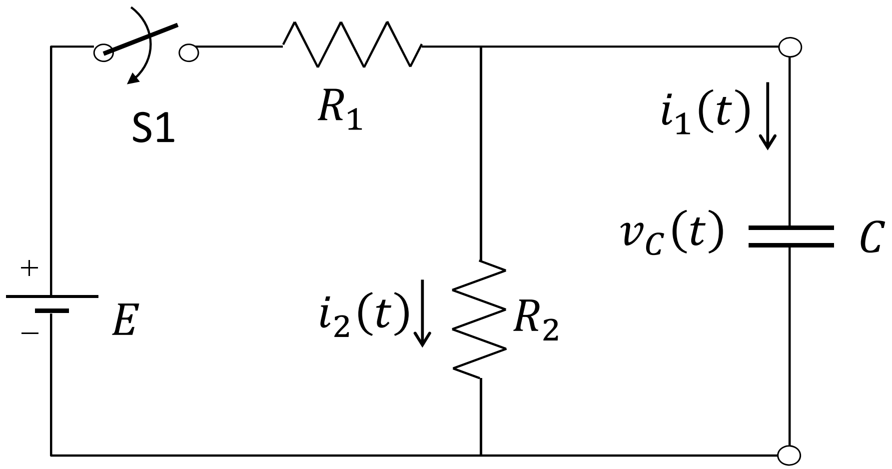
電源が0なので　$i_s(t)=0$

（7） 微分方程式の一般解を求めよ

$i_L(t)=i_s(t)+i_t(t)=Ke^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}$

初期条件が$i_L(0)=E/R_1$なので　$i_L(t)=\frac{E}{R_1}e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}$

小テスト（３）



左のような回路において、次の問いに答えよ
尚、キャパシタの初期電荷は0とする

(1) スイッチS1を閉じる前のスイッチ両端にかかる電圧を求めよ

(2) スイッチS1を閉じた瞬間にキャパシタにかかる電圧を求めよ

(3) スイッチS1を閉じた瞬間にキャパシタに流れる電流を求めよ

(4) スイッチS1を閉じ十分時間が経った後の、抵抗R_2にかかる電圧を求めよ

(5) t=0でスイッチS1を開いた。開いた直後のキャパシタ電圧を求めよ

(6) $t \geq 0$でのキャパシタ電圧の過渡応答を求めよ

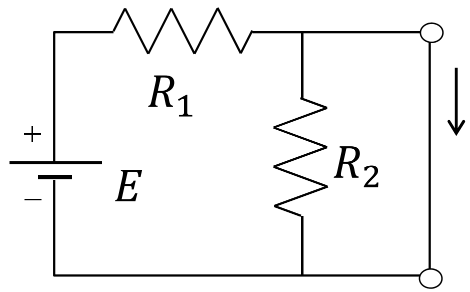
解答

(1) スイッチS1を閉じる前のスイッチ両端にかかる電圧を求めよ

抵抗に電流は流れておらず、キャパシタの初期電荷0なので、これらはすべて短絡とみなせる。したがって、スイッチの電圧はE

(2) スイッチS1を閉じた瞬間にコンデンサにかかる電圧を求めよ

キャパシタ電圧は連続なのでスイッチを入れる直前と等しい。よって 0

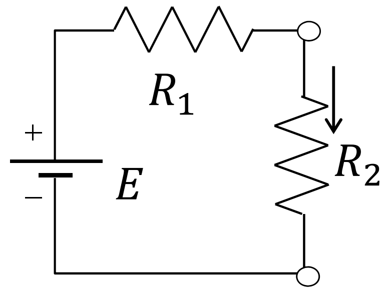


(3) スイッチS1を閉じた瞬間にキャパシタに流れる電流を求めよ

このときキャパシタは短絡と等価なので、並列接続された抵抗R_2には電流は流れず、すべての電流がキャパシタに流れる。よってE/R_1

(4) スイッチS1を閉じ十分時間が経った後の、抵抗R_2にかかる電圧

キャパシタが充電されれば、開放と等価なので電流は流れず、並列接続された抵抗R_2にすべての電流は流れる。よって$E R_2 / (R_1 + R_2)$



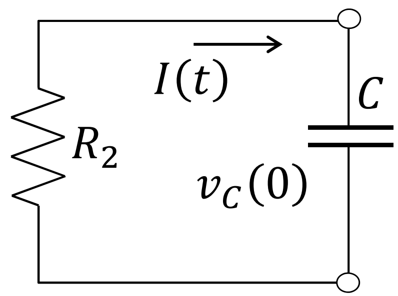
(5) t=0でスイッチS1を開いた。開いた直後のキャパシタ電圧を求めよ

キャパシタ電圧は連続なので　$v_C(0) = E R_2 / (R_1 + R_2)$

(6) t ≥ 0でのコンデンサ電圧の過渡応答を求めよ

回路方程式は　$R_2 C \dfrac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0$　、一般解は$v_C(t) = K e^{-\frac{t}{R_2 C}}$

初期条件は$v_C(0) = K$　より、　$v_C(t) = E R_2 e^{-\frac{t}{R_2 C}} / (R_1 + R_2)$



過渡解の形を求める → 定常解を求める → 完全解 = K × 過渡解 + 定常解
として初期条件から完全解を決定

キャパシタやインダクタ(動的素子)はエネルギーを貯め込む素子

動的素子は急激にエネルギーが変化しない(連続)

キャパシタは電荷Qを貯め込む

キャパシタ → $\frac{1}{2C}Q^2 = \frac{1}{2}CV^2$

キャパシタ電圧は連続

インダクタは鎖交磁束ψを貯め込む

インダクタ → $\frac{1}{2L}\psi^2 = \frac{1}{2}LI^2$

インダクタ電流は連続

初期状態と定常状態の差を埋めるエネルギーの変化が過渡状態

過渡状態は電源を取り除いた回路に発生する現象

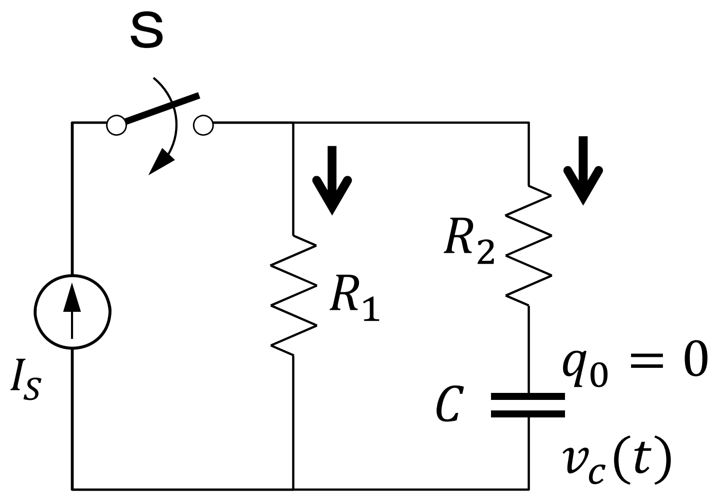
回路の抵抗により電流が熱に代わるため過渡現象は時間とともに必ず0に漸近

定常状態の条件

キャパシタ → 開放

インダクタ → 短絡

小テスト（4）



左のような回路において、以下の問いに答えよ。
尚、コンデンサの初期電荷は0とする

(1) スイッチSを閉じる前のコンデンサにかかる電圧を求めよ

(2) スイッチSを閉じた直後のコンデンサにかかる電圧を求めよ

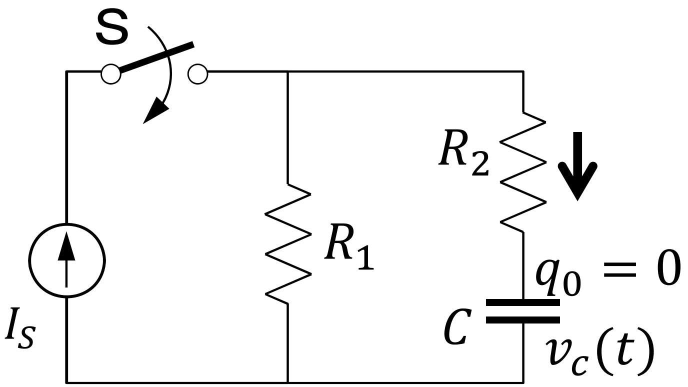
(3) スイッチSを閉じた直後のコンデンサに流れる電流を求めよ

(4) スイッチSを閉じて十分時間が経った後の、コンデンサに流れる電流を求めよ

(5) スイッチSを閉じて十分時間が経った後の、コンデンサにかかる電圧を求めよ

(6) コンデンサの電圧、電流の過渡応答を直観的な手法により図示せよ

解答



(1) スイッチSを閉じる前のコンデンサにかかる電圧を求めよ

初期電荷は0であり、電流は流れないので　　0

(2) スイッチSを閉じた直後のコンデンサの電圧を求めよ

キャパシタ電圧は連続なので電圧は　　0

(3) スイッチSを閉じた直後のコンデンサに流れる電流を求めよ

コンデンサ電圧が0なので、コンデンサは短絡と等価。電源の電流 I_S が、抵抗比によって分流されるので

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} I_S$$

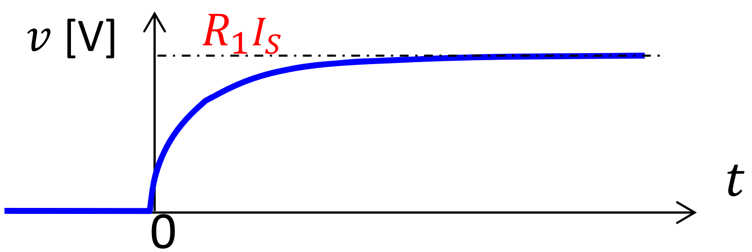
(4) スイッチSを閉じて十分時間が経った後の、コンデンサの電流を求めよ

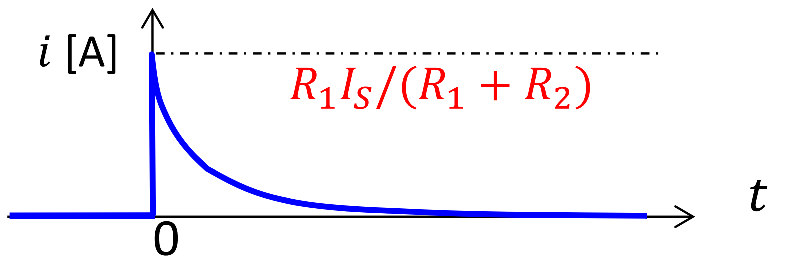
コンデンサが充電された状態なので電流は　　0

(5) スイッチSを閉じて十分時間が経った後の、コンデンサの電圧を求めよ

コンデンサに電流が流れないので、R_1にはすべての電流が流れ込み、R_1両端の電圧は$R_1 I_S$、R_2の電圧が0なので、コンデンサ電圧はR_1両端の電圧と等しく　　$R_1 I_S$

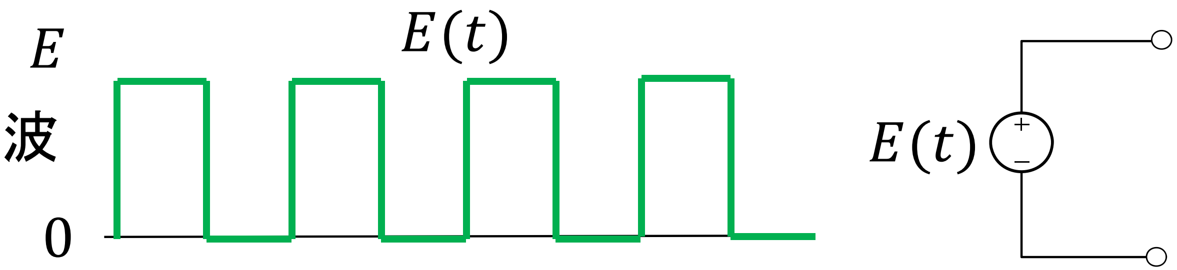
(6) コンデンサの電圧、電流の過渡応答を直観的な手法により図示せよ



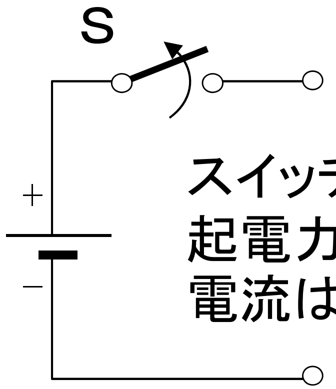


矩形波信号源の等価回路

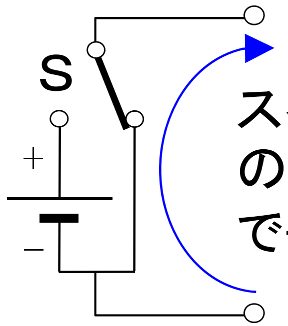
デジタル信号　　ある電圧Eと電圧0Vの2値の信号（一般に電圧源を想定）



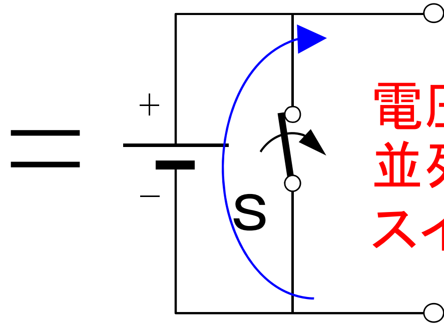
デジタル信号を入力とする回路どんな
直流電源ースイッチ回路と等価か？



スイッチオフのとき、
起電力は働かず、
電流は流れない



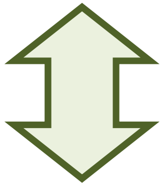
スイッチが短絡側
のとき、起電力0
でも電流が流れる

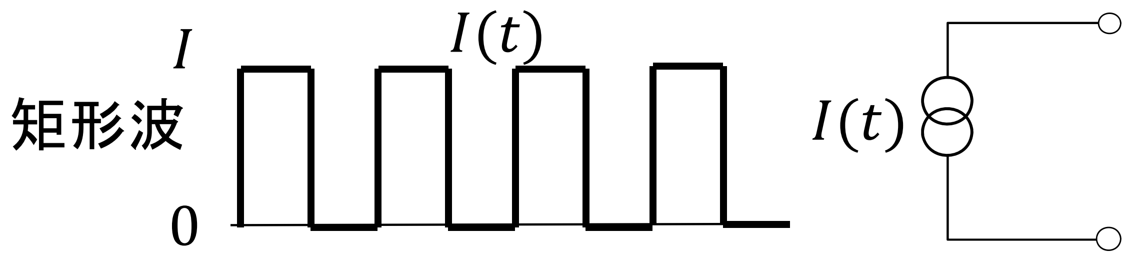


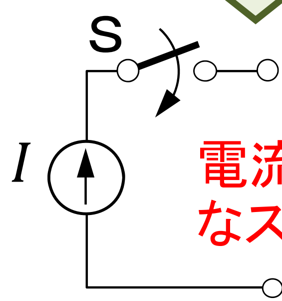
電圧源に
並列な
スイッチ

負荷から過渡電流は
流れない

負荷から過渡電流が
流れる

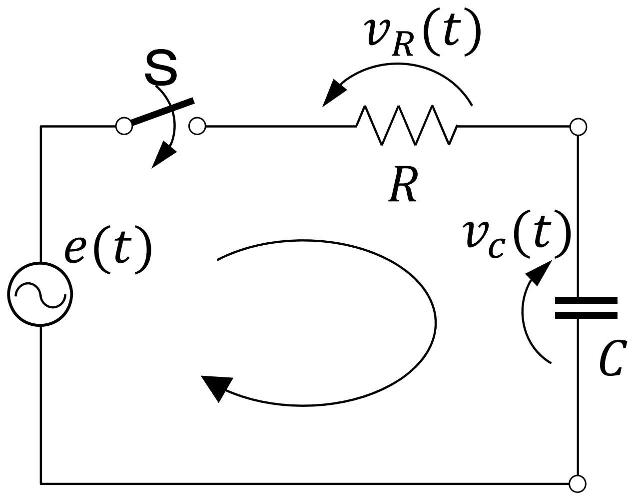






電流源に直列
なスイッチ

小テスト(5)



電源電圧を $e(t) = \cos(\omega t)$ とし、$t = 0$ でスイッチを閉じた。
ここで, $R = C = 1$ とする

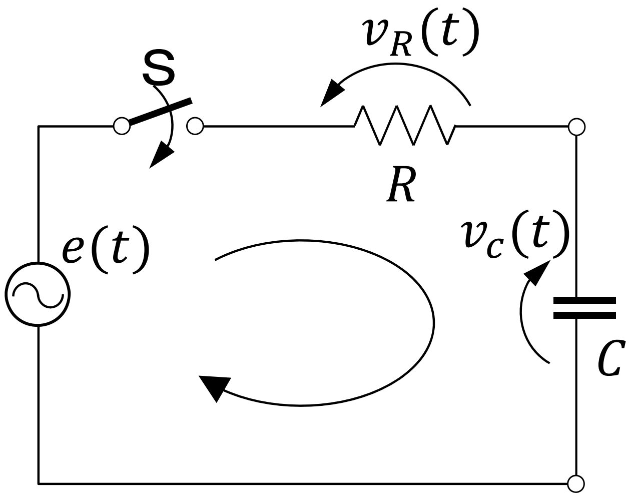
（1）電荷$Q(t)$の微分方程式を導出せよ

（2）$Q(t)$の余関数$Q_t(t)$を求めよ

（3）$Q(t)$の特殊解$Q_s(t)$を求めよ

（4）$Q(t)$の一般解を求めよ

解答



電源電圧を $e(t) = \cos(\omega t)$ とし、$t = 0$ でスイッチを閉じた。
ここで, $R = C = 1$ とする

（1）電荷$Q(t)$の微分方程式を導出せよ

キルヒホッフの電圧則 $e(t) = v_R(t) + v_C(t)$より

$$R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = \cos(\omega t) = \frac{dQ(t)}{dt} + Q(t) = \cos(\omega t)$$

（2）$Q(t)$の余関数$Q_t(t)$を求めよ

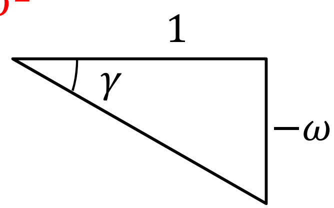
$Q_t(t) = Ke^{\lambda t}$ を代入し、$(\lambda + 1)Ke^{\lambda t} = 0$ より$\lambda = -1$　よって　$Q_t(t) = Ke^{-t}$

（3）$Q(t)$の特殊解$Q_s(t)$を求めよ

電源を複素表示で表すと$\mathrm{Re}[e^{j\omega t}]$であり、特殊解を$Q_s(t) = \dot{k}e^{j\omega t}$ の実部とすると

代入すれば　$(j\omega + 1)\dot{k}e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$ と表せるので、$\dot{k} = \dfrac{1}{1 + j\omega} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}e^{j\gamma}$

したがって、　$Q_s(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{k}e^{j\omega t}\right] = \dfrac{\cos(\omega t + \gamma)}{\sqrt{1 + \omega^2}}$　ここで $\tan\gamma = -\omega$

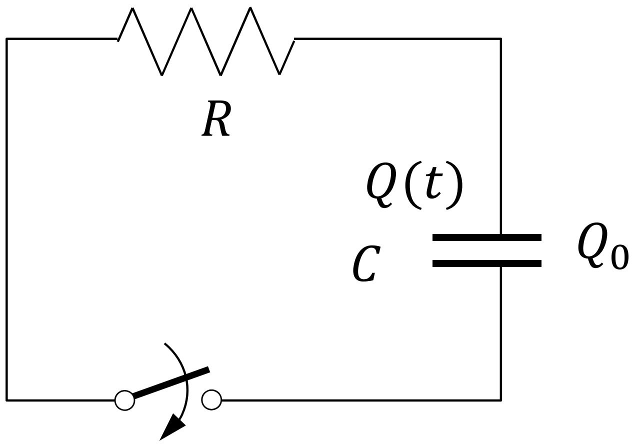


（4）$Q(t)$の一般解を求めよ

$Q(t) = Q_t(t) + Q_s(t)$　→　$Q_t(0) + Q_s(0) = 0$　より　$K = -\cos(\gamma)/\sqrt{1 + \omega^2}$

$$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}\{-\cos(\gamma)\, e^{-t} + \cos(\omega t + \gamma)\}$$　ここで $\tan\gamma = -\omega$

小テスト(7)



RC直列回路に単位インパルス電圧を与えたときのコンデンサ両端の電圧の挙動は以下で与えられる。

$$v_C(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{(インパルス応答)}$$

この挙動は、初期電荷Q_0を持つ電源のないRC直列回路において t=0 でスイッチを閉じるときの動的挙動と同じである。

(1) この回路の微分方程式を$Q(t)$を用いて表せ。

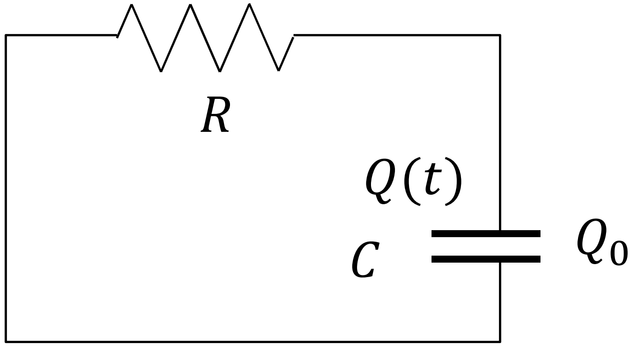
(2) 余関数 $Q(t) = Ae^{\eta t}$ が一般解となるが、η を求めよ。

(3) 初期電荷が Q_0 のとき、未知数 A を求めよ。

(4) $Q(t)$の一般解からコンデンサ端の電圧を求めよ。

(5) インパルス応答と比較して、初期電荷 Q_0 を求めよ。

解答



(1) この回路の微分方程式を$Q(t)$を用いて表せ。

電荷と電流の関係は $I(t) = \frac{d}{dt}Q(t)$

キルヒホッフの電圧則 $RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0$

微分方程式は $R\frac{d}{dt}Q(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0$

(2) 余関数 $Q(t) = Ae^{\eta t}$ が一般解となるが、η を求めよ。

$R\eta Ae^{\eta t} + \frac{Ae^{\eta t}}{C} = 0$ ➡ $\eta RC + 1 = 0$ ➡ $\eta = -\frac{1}{RC}$

(3) 初期電荷が Q_0 のとき、未定係数 A を求めよ。

$Q(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$ $Q(0) = A = Q_0$

(4) $Q(t)$の一般解からコンデンサ端の電圧を求めよ。

$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ ➡ $v_C(t) = Q(t)/C$ ➡ $v_C(t) = \frac{Q_0}{C}e^{-\frac{t}{RC}}$

(5) インパルス応答と比較して、初期電荷 Q_0 を求めよ。

インパルス応答は $\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$ なので、 $Q_0 = 1/R$

小テスト（8）

$\mathcal{L}[f(t)]$が次のように与えられるとき逆ラプラス変換により、$f(t)$を求めよ

(1) $$\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\alpha}\right]=e^{-\alpha t}$$ より

(2) $$\frac{1}{s^2+s}$$

(3) $$\frac{s-1}{s^2+s}$$

(4) $$\frac{1}{s^3+s}$$

(5) $$\frac{2}{s^3+3s^2+2s}$$

解答

$\mathcal{L}[f(t)]$が次のように与えられるとき逆ラプラス変換により、$f(t)$を求めよ

(1) $\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{2}{s+3}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\alpha}\right]=e^{-\alpha t}$$ より

$$f(t)=\{e^{-2t}+2e^{-3t}\}u(t)$$

(2) $\dfrac{1}{s^2+s}$

部分分数展開すると $\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}$ より

$$f(t)=\{1-e^{-t}\}u(t)$$

(3) $\dfrac{s-1}{s^2+s}$

$\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s+1}$ とおくと 、以下の恒等式

$a(s+1)+bs=s-1$ が成立

$a=-1, b=2$ より

$$f(t)=\{-1+2e^{-t}\}u(t)$$

(4) $\dfrac{1}{s^3+s}$

部分分数展開すると $\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+1}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]=\cos(t)$$ より

$$f(t)=\{1-\cos(t)\}u(t)$$

(5) $\dfrac{2}{s^3+3s^2+2s}$

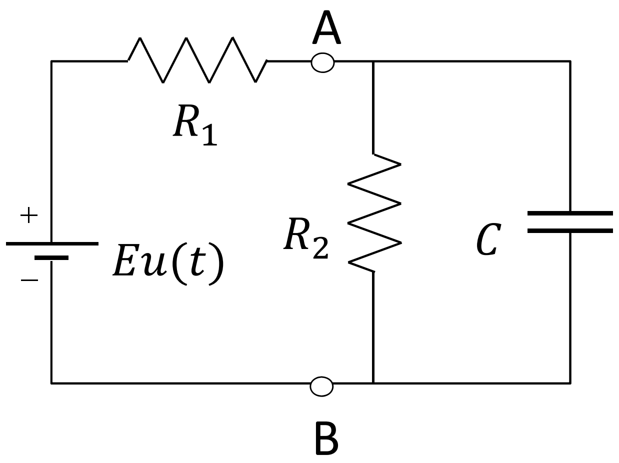
$\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s+2}+\dfrac{c}{s+1}$ とおくと 、以下の恒等式

$$=\frac{(a+b+c)s^2+(3a+b+2c)s+2a}{s(s+2)(s+1)}$$ が成立

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+b+2c=0 \\ a=1 \end{cases}$$ より、 $$\begin{aligned} b&=1 \\ c&=-2 \end{aligned}$$

$$f(t)=\{1+e^{-2t}-2e^{-t}\}u(t)$$

小テスト(9)



左のような回路において、接点AB間の電圧の過渡応答を求めたい。コンデンサの初期電荷は0として次の問いに答えよ

(1) S領域の回路を書け

(2) 接点ABから右側を見た回路のS領域での合成インピーダンスを求めよ

(3) 電源から見た回路のS領域での合成インピーダンスを求めよ

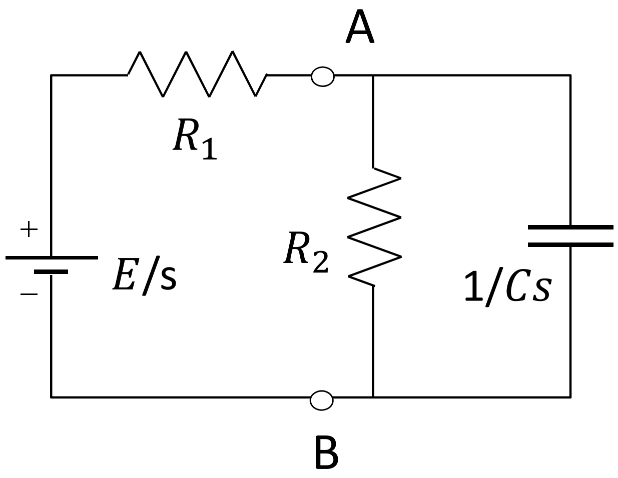
(4) 接点AB間のs領域での電圧を求めよ

(5) (4)を部分分数分解せよ

(6) 逆ラプラス変換により、過渡応答を求めよ

解答

(1)



(2)　接点ABから右の合成インピーダンス

$$Z_{AB}=R_2//\frac{1}{Cs}=\frac{R_2\frac{1}{Cs}}{R_2+\frac{1}{Cs}}=\frac{R_2}{1+R_2Cs}$$

(3)　回路の合成インピーダンス

$$Z_{all}=R_1+\frac{R_2}{1+R_2Cs}$$

(4)　接点AB間のs領域での電圧を求めよ

$$V_{AB}(s)=\frac{Z_{AB}}{Z_{all}}\cdot\frac{E}{s}=\frac{\frac{R_2}{1+R_2Cs}}{R_1+\frac{R_2}{1+R_2Cs}}\cdot\frac{E}{s}=\frac{R_2}{R_1+R_2+R_1R_2Cs}\cdot\frac{E}{s}=\frac{1}{s+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}}\cdot\frac{E}{R_1Cs}$$

(5)　(4)を部分分数分解せよ

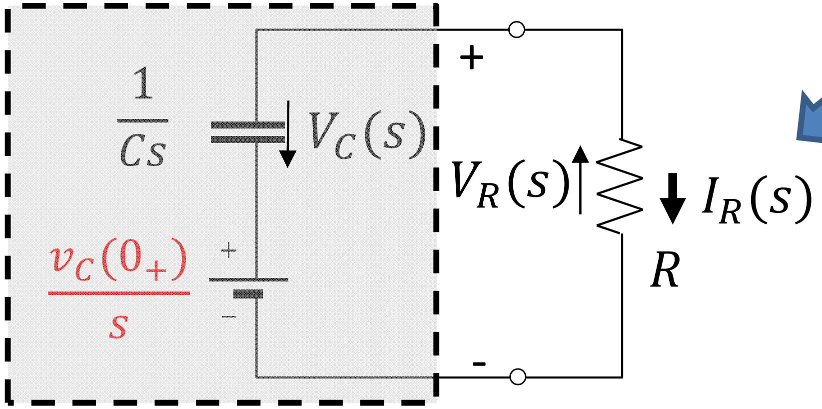
$$V_{AB}(s)=\frac{R_2E}{R_1+R_2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}}\right)$$

(6)　逆ラプラス変換により過渡応答を求めよ

$$v_{AB}(t)=\mathcal{L}^{-1}[V_{AB}(s)]=\frac{R_2E}{R_1+R_2}\left(1-e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right)u(t)$$

s領域モデルの内部応答

キャパシタの電圧源モデル



$$I_R(s)=\frac{\frac{v_C(0_+)}{s}}{R+\frac{1}{Cs}}=\frac{v_C(0_+)}{R}\frac{1}{s+\frac{1}{CR}}$$

オームの法則より

$$V_R(s)=RI_R(s)=\frac{v_C(0_+)}{s+\frac{1}{CR}}$$

負荷の応答は正しい

一方、分圧の法則により得られる$V_R(s)$は

$$V_R(s)=\frac{R}{R+\frac{1}{Cs}}\frac{v_C(0_+)}{s}=\frac{v_C(0_+)}{s+\frac{1}{RC}}$$

同様に、素子内部応答$V_C(s)$は分圧により

$$V_C(s)=\frac{\frac{1}{Cs}}{R+\frac{1}{Cs}}\frac{v_C(0_+)}{s}=\frac{v_C(0_+)}{RC}\frac{1}{s(s+\frac{1}{RC})}=\frac{v_C(0_+)}{s}-\frac{v_C(0_+)}{s+\frac{1}{RC}}$$

無電源回路
$V_C(s)=V_R(s)$

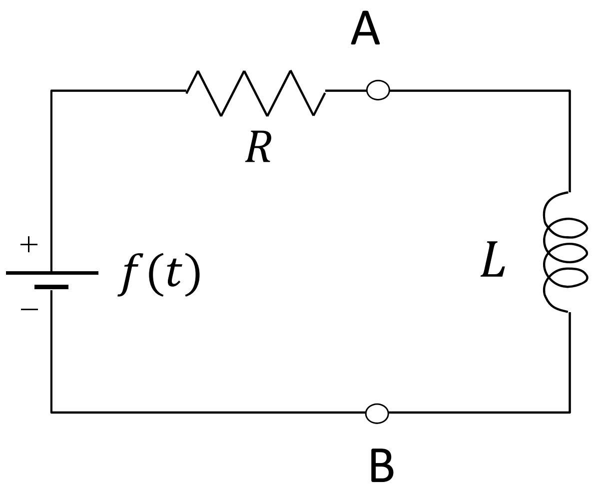
初期値による起電力とは逆向きの起電力が発生してしまう　$V_C(s)\neq -V_R(s)$

しかし、初期値による電圧源も含めたキャパシタ電圧は $\frac{v_C(0_+)}{s}-V_C(s)=\frac{v_C(0_+)}{s+\frac{1}{RC}}=V_R(s)$

これが、等価回路モデル内部素子の応答が実際と異なる理由

電圧源（電流源）モデルで動的素子の電圧（電流）を考える際には、動的素子と初期値による電圧源（電流源）を合わせて1素子と考えれば正しい結果が得られる

小テスト（10）



左のような回路において、インダクタの初期電流をI_0
として次の問いに答えよ。尚、$f(t)$のラプラス変換は$F(s)$
とする

(1)　S領域の回路を書け

(2)　S領域での合成インピーダンスを求めよ

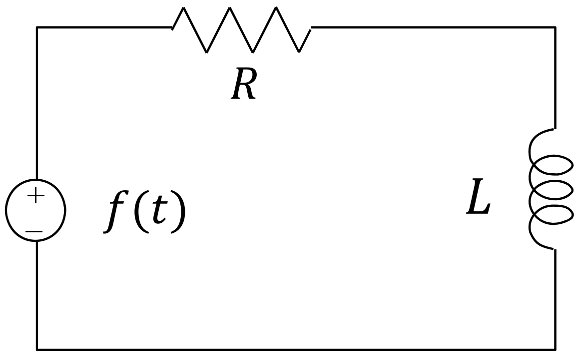
(3)　S領域での抵抗の電圧を求めよ

(4)　入力電圧を入力とし抵抗の電圧を出力とするシステムの伝達関数をsで表せ

(5) $s = j\omega$ を代入し、伝達関数の絶対値をωで表せ

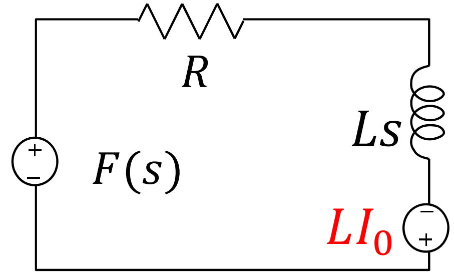
(6)　(5)で得られた周波数応答の概形を横軸は角周波数、縦軸絶対値として図示せよ

解答



左のような回路において、インダクタの初期電流をI_0として次の問いに答えよ。尚、$f(t)$のラプラス変換は$F(s)$とする

(1) S領域の回路を書け



(2) S領域での合成インピーダンスを求めよ

$R + Ls$

(3) S領域での抵抗の電圧を求めよ

電源が分圧されるので $\dfrac{R}{R + Ls} F(s)$

(4) 入力電圧を入力とし抵抗の電圧を出力とするシステムの伝達関数Hをsで表せ

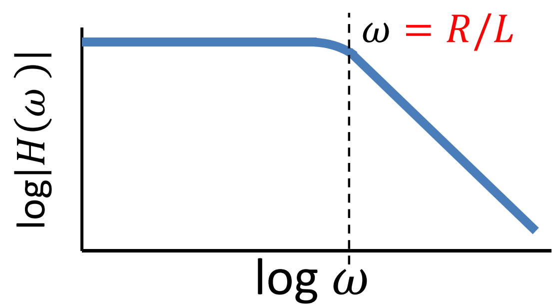
$$H(s) = \frac{R}{R + Ls}$$

(5) $s = j\omega$ を代入し、伝達関数Hの絶対値をωで表せ

$$|H(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

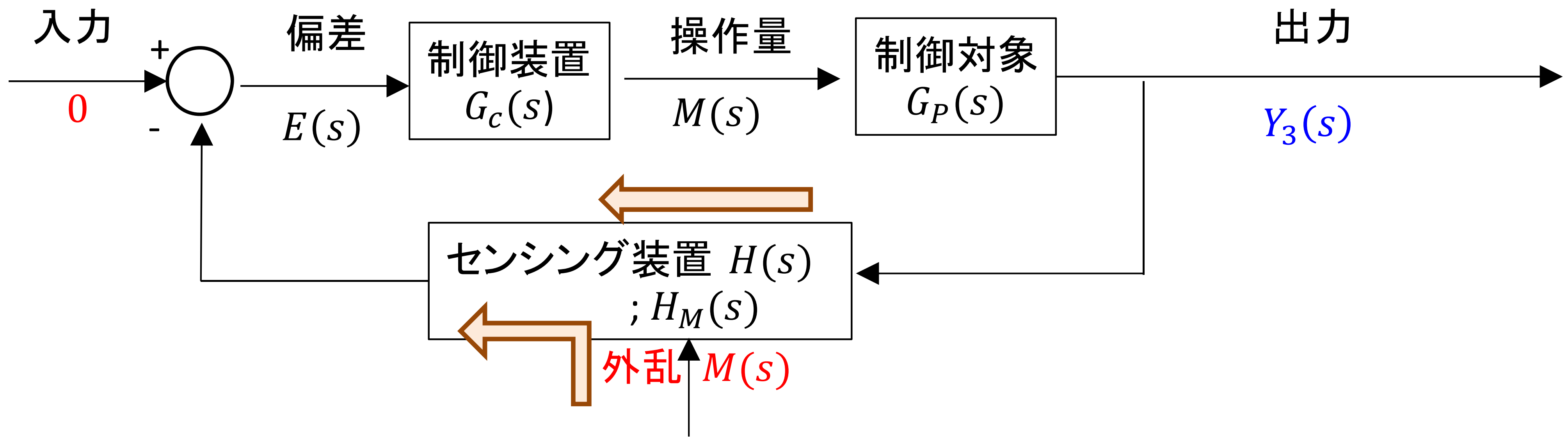
(6) $|H(\omega)|$の概形を横軸は角周波数として図示せよ

$\omega \ll R/L$のとき$|H(\omega)| = 1$ 、$\omega \gg R/L$のとき$|H|(\omega) = \dfrac{R}{\omega L}$



小テスト(11)

先ほどの例で、制御対象ではなく、センシング装置に外乱$M(s)$が入る場合を考える。
設定値(入力)は0として問いに答えよ。なお、$H_M(s)$は外乱$M(s)$に対する伝達関数



(1) センシング装置の外乱による出力を$M(s)$と$H_M(s)$用いて表せ　　$H_M(s)M(s)$

(2) 偏差$E(s)$を$M(s)$、$H(s)$、$H_M(s)$、$Y_3(s)$、を用いて表せ　　$E(s) = -H(s)Y_3(s) - H_M(s)M(s)$

(3) 偏差$E(s)$と出力$Y_3(s)$の関係から、外乱$M(s)$ による
入力0における伝達関数$G_3(s)$を求めよ。

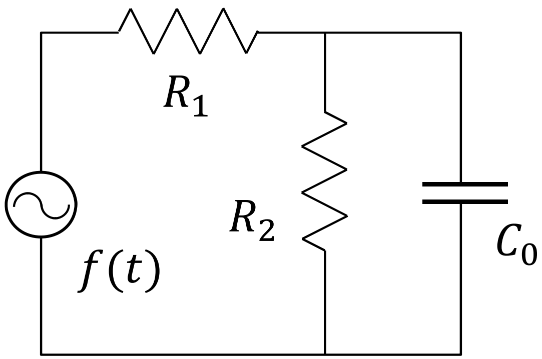
$$G_3(s) = \frac{-G_P(s)G_C(s)H_M(s)}{1 + G_P(s)G_C(s)H(s)}$$

(4) 外乱0における入出力の伝達関数から，総伝達関数を求めよ

$$G(s) = \frac{G_P(s)G_C(s)(1 - H_M(s))}{1 + G_P(s)G_C(s)H(s)}$$

(5) $H_M(s)$が１のときシステムはどのような動作をするか　　なにもしない

小テスト（１２）



左のような回路において、電源電圧$f(t)$を入力とし、コンデンサに貯まる電荷を状態変数$x(t)$とする状態方程式を考える。

(1)　コンデンサ端の電圧$v_c(t)$を状態変数で表せ

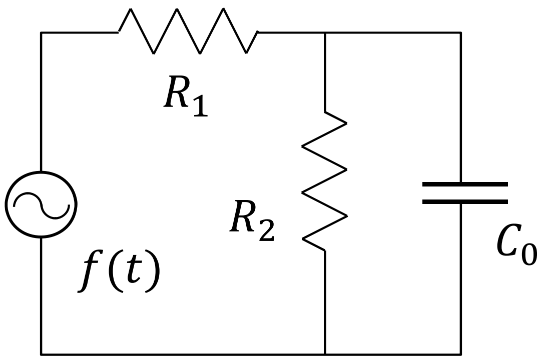
(2) コンデンサに流れる電流を状態変数で表せ

(3) 抵抗R_2を流れる電流を状態変数で表せ

(4)　抵抗R_1の電圧v_{R_1}を状態変数で表せ

(5)　キルヒホッフの電圧則から状態方程式を求めよ

解答



(1)　コンデンサ端の電圧$v_c(t)$を状態変数で表せ

コンデンサ端の電圧と蓄積電荷の関係
$q(t) = C_0 v(t)$　より

$$v_c(t) = \frac{1}{C_0} x(t)$$

(2) コンデンサに流れる電流を状態変数で表せ

コンデンサ電流は　$i_c(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

(3) 抵抗R_2を流れる電流を状態変数で表せ

抵抗R_2を両端の電圧は$v_c(t)$より　$i_{R_2}(t) = \frac{1}{R_2 C_0} x(t)$

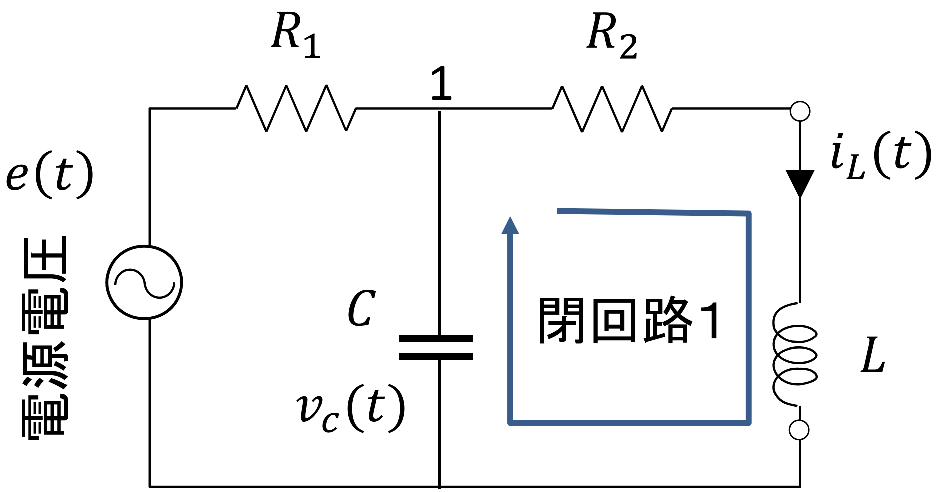
(4)　抵抗R_1の電圧v_{R_1}を状態変数で表せ

$$v_{R_1} = R_1(i_c(t) + i_{R_2}(t)) = R_1 \frac{d}{dt} x(t) + \frac{R_1}{R_2 C_0} x(t)$$

(5)　キルヒホッフの電圧則から状態方程式を求めよ

$v_{R_1} + v_C(t) = f(t)$　より　$$\frac{d}{dt} x(t) = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_0} x(t) + \frac{1}{R_1} f(t)$$

小テスト（13）



左の回路の状態方程式を導出する。

（1）抵抗R_1に流れる電流を$v_c(t)$, $e(t)$で表せ

（2）コンデンサに流れる電流を$v_c(t)$を用いて表せ

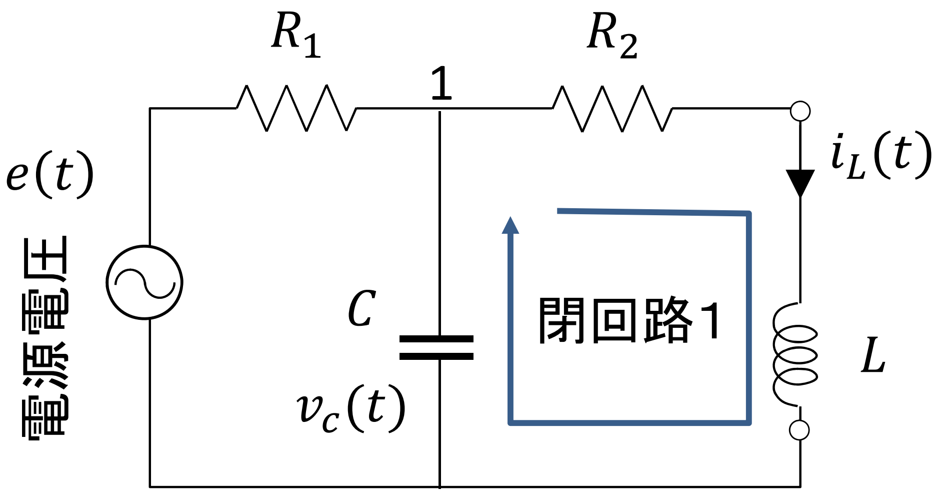
（3）接点1でのキルヒホッフの電流則による関係を$v_c(t)$と$i_L(t)$で表せ

（4）インダクタの逆起電力を$i_L(t)$で表せ

（5）閉回路1での電圧則による関係式を$v_c(t)$と$i_L(t)$で表せ

（6）$v_c(t)$, $i_L(t)$を状態ベクトルとして状態方程式を求めよ

解答



左の回路の状態方程式を導出する。

(1)抵抗R_1に流れる電流を$v_c(t)$, $e(t)$で表せ

$$\frac{e(t)-v_c(t)}{R_1}$$

(2)コンデンサに流れる電流を$v_c(t)$を用いて表せ

$$i_c(t)=C\frac{d}{dt}v_c(t)$$

(3)接点1でのキルヒホッフの電流則による関係を$v_c(t)$と$i_L(t)$で表せ

$$\frac{e(t)-v_c(t)}{R_1}=C\frac{d}{dt}v_c(t)+i_L(t)$$

(4)インダクタの逆起電力を$i_L(t)$で表せ

インダクタ電流の時間微分が磁束なので、

$$v_L(t)=L\frac{d}{dt}i_L(t)$$

(5)閉回路1での電圧則による関係式を$v_c(t)$と$i_L(t)$で表せ

抵抗R_2、インダクタ、キャパシタの電圧を矢印の向きを正として、足していくと

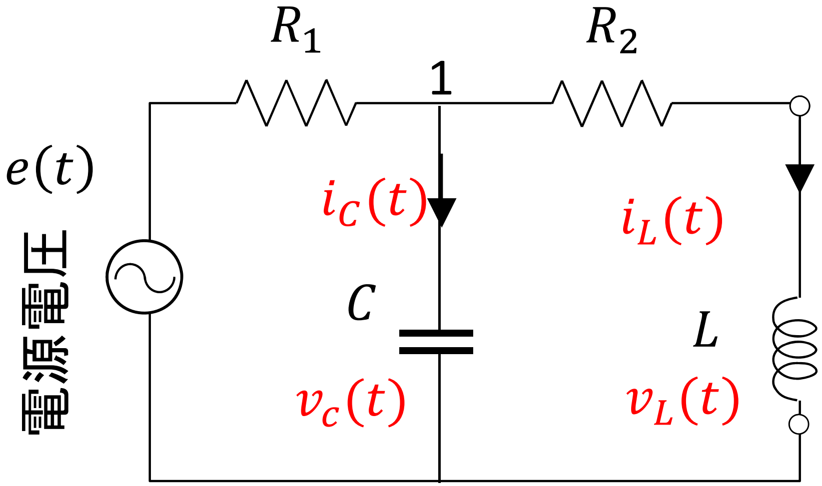
$$R_2 i_L(t)+L\frac{d}{dt}i_L(t)-v_c(t)=0$$

(6)$v_c(t)$, $i_L(t)$を状態ベクトルとして状態方程式を求めよ

(3)(5)式は$v_c(t)$, $i_L(t)$で表されているので、状態ベクトルをこれらに取ると、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1C} \\ 0 \end{pmatrix}e(t)$$

小テスト（13）の考察



先ほどの回路において

$\begin{pmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix}$は 状態ベクトルになることがわかっている。

$i_C(t)$, $i_L(t)$, $v_C(t)$, $v_L(t)$の4つうち
2つを用いて他に状態ベクトルになる組み合わせを求めよ

$$\begin{pmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_L(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c(t) \\ v_L(t) \end{pmatrix}$$

線形な関係にあるため$i_L(t)$, $v_L(t)$は
状態ベクトルになる

$$\begin{pmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & R_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L(t) \\ i_c(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

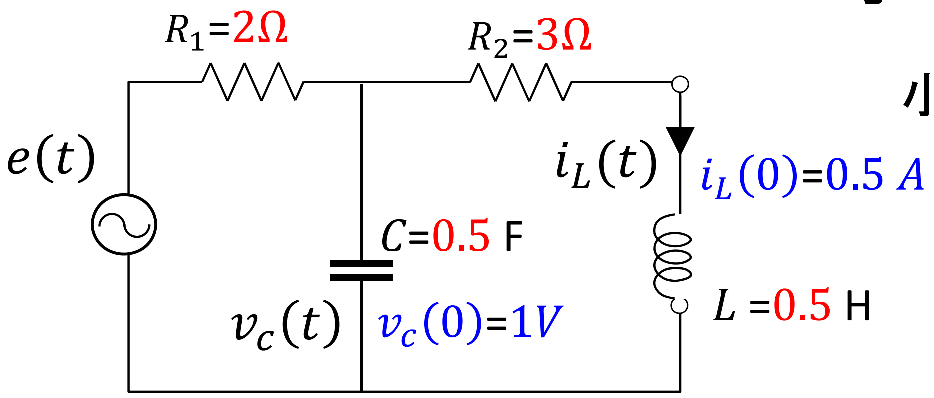
$$\begin{pmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c(t) \\ i_c(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{R_1} \begin{pmatrix} 0 \\ e(t) \end{pmatrix}$$

状態方程式に電源の微分が現れてしまい，状態方程式の定義通りにはならない

複雑になるので，状態ベクトルにとらないほうがよい

$$\begin{pmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_c(t) \\ v_L(t) \end{pmatrix}$$ 線形表現できない

小テスト（14）



小テスト(13)の問題について、状態方程式を考える

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{e(t)}{R_1 C} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) システム係数行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ

(2) $s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$を求めよ

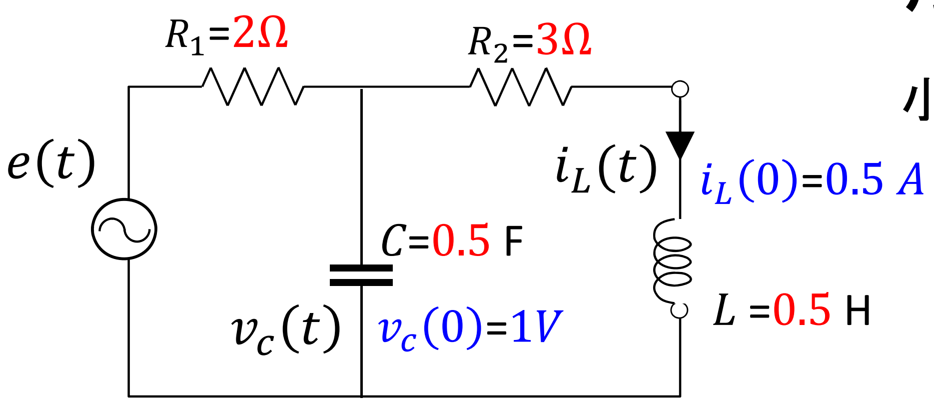
(3) $s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$の逆行式を求めよ

(4) $\boldsymbol{\Phi}(s)$を求めよ

(5) $\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{x_0}$を求めよ

(6) ゼロ入力応答を求めよ

解答



小テスト(13)の問題について、状態方程式を考える

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{e(t)}{R_1 C} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) システム係数行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ

状態ベクトルにかかる行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

(2) $s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$を求めよ

$\boldsymbol{I}$は単位行列なので、 $s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ -2 & s+6 \end{pmatrix}$

(3) $s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$の逆行式を求めよ

$(s+1)(s+6) - 2(-2) = s^2 + 7s + 10 = (s+2)(s+5)$

(4) $\boldsymbol{\Phi}(s)$を求めよ

$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$の逆行列なので、 $\boldsymbol{\Phi}(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s+5)} \begin{pmatrix} s+6 & -2 \\ 2 & s+1 \end{pmatrix}$

(5) $\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{x_0}$を求めよ

$\boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ なので $\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{x_0} = \dfrac{s+5}{(s+2)(s+5)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{s+2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

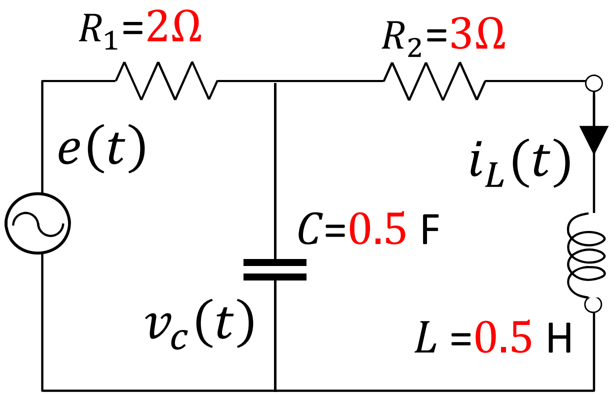
(6) ゼロ入力応答を求めよ

$\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{x_0}$ の逆ラプラス変換なので

$$\mathcal{L}^{-1}[\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{x_0}] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}\right] = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

初期値のみに依存，
$t = 0$で初期値に一致

小テスト（15）



小テスト(13)の問題について、電源 $e(t) = e^{-6t}$ $(t \geq 0)$ とする

(7) 駆動行列$\boldsymbol{B}$と入力を求めよ

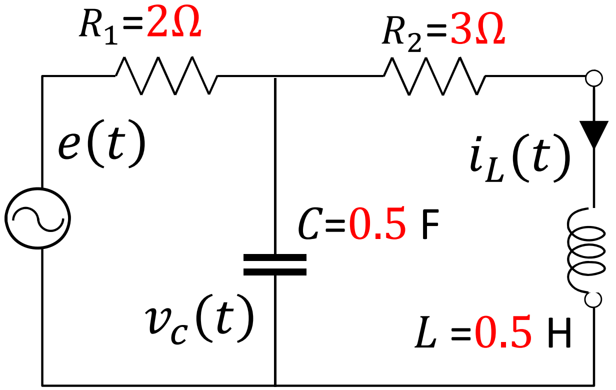
(8) ラプラス領域での入力ベクトル$\boldsymbol{U}(s)$を求めよ

(9) ゼロ状態応答を求めよ

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)} = \frac{\alpha}{s+a} + \frac{\beta}{s+b} + \frac{\gamma}{s+c}$$

$$\alpha = \frac{1}{(a-b)(a-c)}, \beta = \frac{1}{(b-c)(b-a)}, \gamma = \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

解答



小テスト(13)の問題について、電源 $e(t) = e^{-6t}$ $(t \geq 0)$ とする

(7) 駆動行列$\boldsymbol{B}$と入力を求めよ

$\boldsymbol{B}$はベクトル$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e(t) = e^{-6t}u(t)$
入力はスカラー値

(8) ラプラス領域での入力ベクトル$\boldsymbol{U}(s)$を求めよ

$$\boldsymbol{U}(s) \to U(s) = \mathcal{L}^{-1}[e(t)] = \frac{1}{s+6}$$

(9) ゼロ状態応答を求めよ

$$\boldsymbol{\Phi}(s) = \frac{1}{(s+2)(s+5)} \begin{pmatrix} s+6 & -2 \\ 2 & s+1 \end{pmatrix}$$ より $$\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}U(s) = \frac{1}{(s+2)(s+5)} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{s+6} \end{pmatrix}$$

第1要素 $$\frac{1}{(s+2)(s+5)} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+5}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{3}\{e^{-2t} - e^{-5t}\}$$

$$\frac{ds+e}{(s+a)(s+b)(s+c)} = \frac{\alpha}{s+a} + \frac{\beta}{s+b} + \frac{\gamma}{s+c}$$

$$\alpha = \frac{e-ad}{(a-b)(a-c)}, \beta = \frac{e-bd}{(b-c)(b-a)}, \gamma = \frac{e-cd}{(c-a)(c-b)}$$

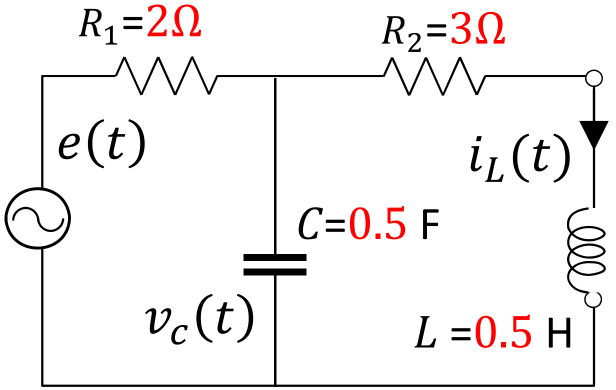
第2要素 $$\frac{2}{(s+2)(s+5)(s+6)}$$

$$= \frac{1}{(-3)(-4)}\frac{2}{s+2} + \frac{1}{(3)(-1)}\frac{2}{s+5} + \frac{1}{(4)(1)}\frac{2}{s+6}$$

$$= \frac{1}{6}\frac{1}{s+2} - \frac{2}{3}\frac{1}{s+5} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+6} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t} + \frac{1}{2}e^{-6t}$$

初期値0の応答，$t=0$で0になる

小テスト（16）



小テスト(13)の問題について、出力を抵抗R_1, R_2の電圧とする

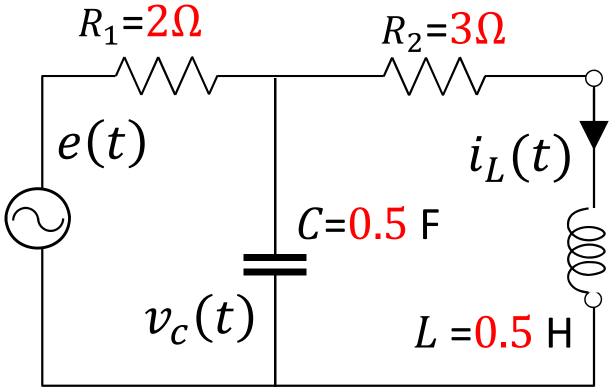
(1) 出力方程式を求めよ

(2) 小テスト14,15の結果から完全解を求めよ

(3) 出力を求めよ

(4) 伝達関数を求めよ

解答



小テスト(13)の問題について、出力を抵抗R_1, R_2の電圧とする

(1) 出力方程式を求めよ

$$v_{R_1}(t) = e(t) - v_c(t)$$
$$v_{R_2}(t) = R_2 i_L(t)$$

$$\begin{pmatrix} v_{R_1}(t) \\ v_{R_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e(t)$$

(2) 小テスト14,15の結果から完全解を求めよ　　完全解＝ゼロ入力応答＋ゼロ状態応答:

$$\begin{pmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ \frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t} \\ \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t} + \frac{1}{2}e^{-6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t} \\ \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t} + \frac{1}{2}e^{-6t} \end{pmatrix}$$

(3) 出力を求めよ

$$\begin{pmatrix} v_{R_1}(t) \\ v_{R_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-6t} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t} + e^{-6t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-5t} + \frac{3}{2}e^{-6t} \end{pmatrix}$$

(4) 伝達関数を求めよ

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+5)} \begin{pmatrix} s+6 & -2 \\ 2 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+5)} \begin{pmatrix} s+6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+5)} \begin{pmatrix} -s-6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s+5)} \begin{pmatrix} s^2+6s+4 \\ 6 \end{pmatrix}$$