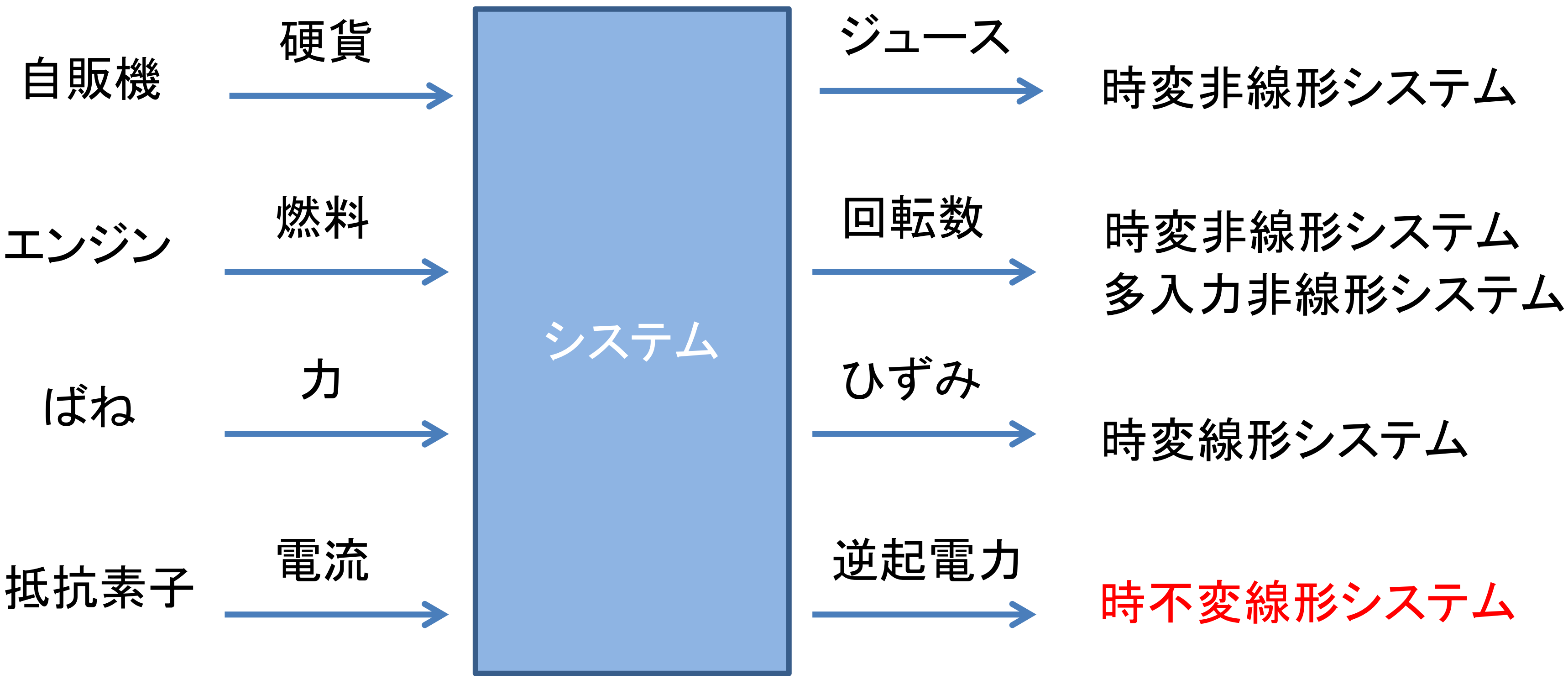
線形システム

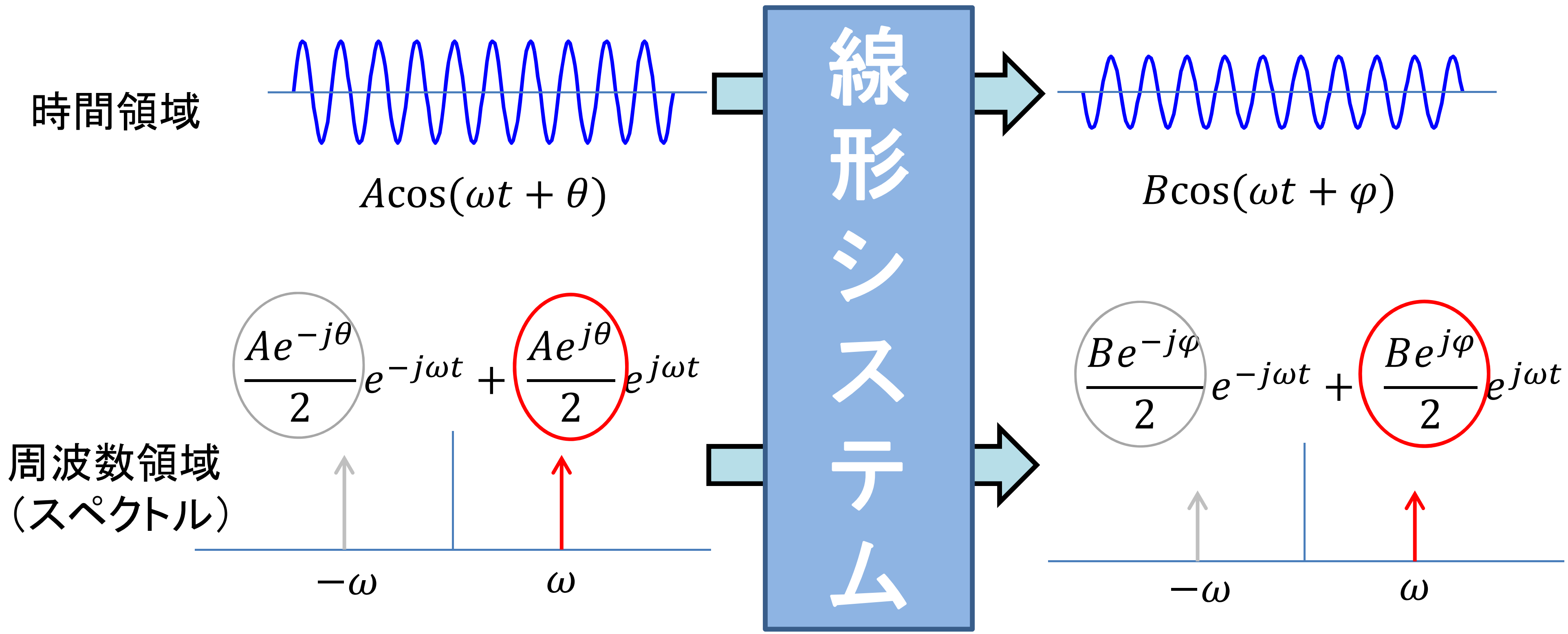


時不変線形システム

入力波形 n倍 → 出力波形 n倍

和、差の入力波形 → 各出力波形の和、差

線形システムの特徴



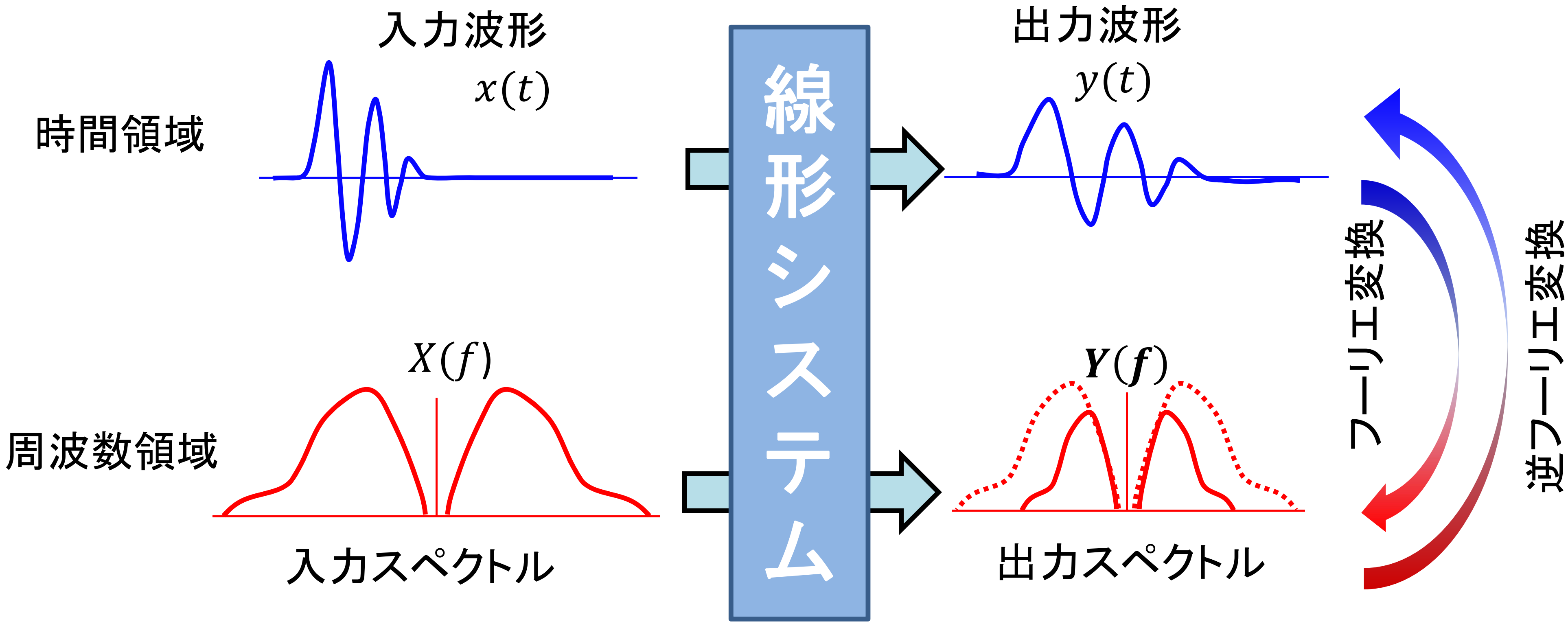
線形システムは周波数を変化させない

$\frac{Ae^{j\theta}}{2}$ ➡ 角周波数ωでのシステムの特性 ➡ $\frac{Be^{j\varphi}}{2}$

正の周波数スペクトルの振幅と位相の変化がシステムの特性を表す

角周波数ωでのシステムの特性 $= \dfrac{\text{出力スペクトルの複素振幅}}{\text{入力スペクトルの複素振幅}} = \dfrac{B}{A}e^{j\{\varphi-\theta\}}$

システム伝達関数



線形システムは周波数を変えないため、様々な周波数を含む信号であっても、
各周波数毎に独立に応答を議論できる

$$\text{システムの特性} = \frac{Y(f)}{X(f)} = \text{伝達関数}\ H(f)$$

信号の入出力の関係　$Y(f) = H(f)X(f)$

伝達関数の表現

周波数領域

出力スペクトル $Y(f)$ = 伝達関数 $H(f)$ × 入力スペクトル $X(f)$

出力スペクトルの逆フーリエ変換

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f)\exp(j2\pi f t)\,df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} H(f)X(f)\exp(j2\pi f t)\,df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t')x(t-t')dt'$$

時間領域

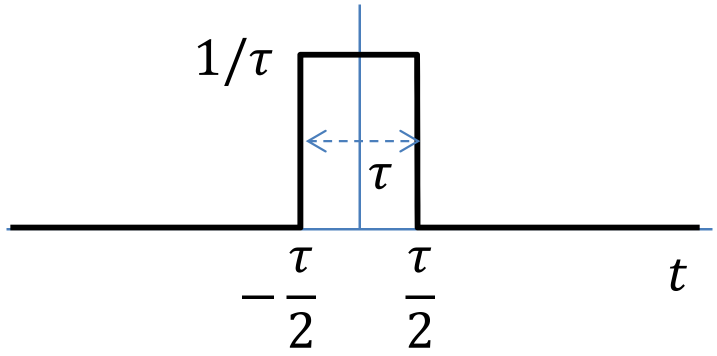
システムの出力波形 $y(t)$ = 伝達関数の逆フーリエ変換 $h(t)$ 畳み込み積分 $\circledast$ 入力波形 $x(t)$

どのような波形$x(t)$を用いれば伝達関数を計測することができるだろうか？

矩形パルスとSINC関数

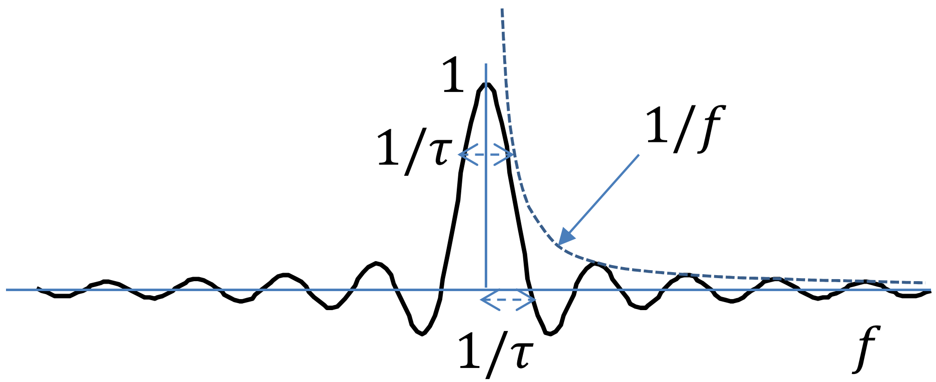
単発矩形パルス

$$\mathrm{rect}(t)=\begin{cases}1/\tau & \left(-\dfrac{\tau}{2}\le t\le\dfrac{\tau}{2}\right)\\ 0 & \left(t<-\dfrac{\tau}{2}, t>\dfrac{\tau}{2}\right)\end{cases}$$



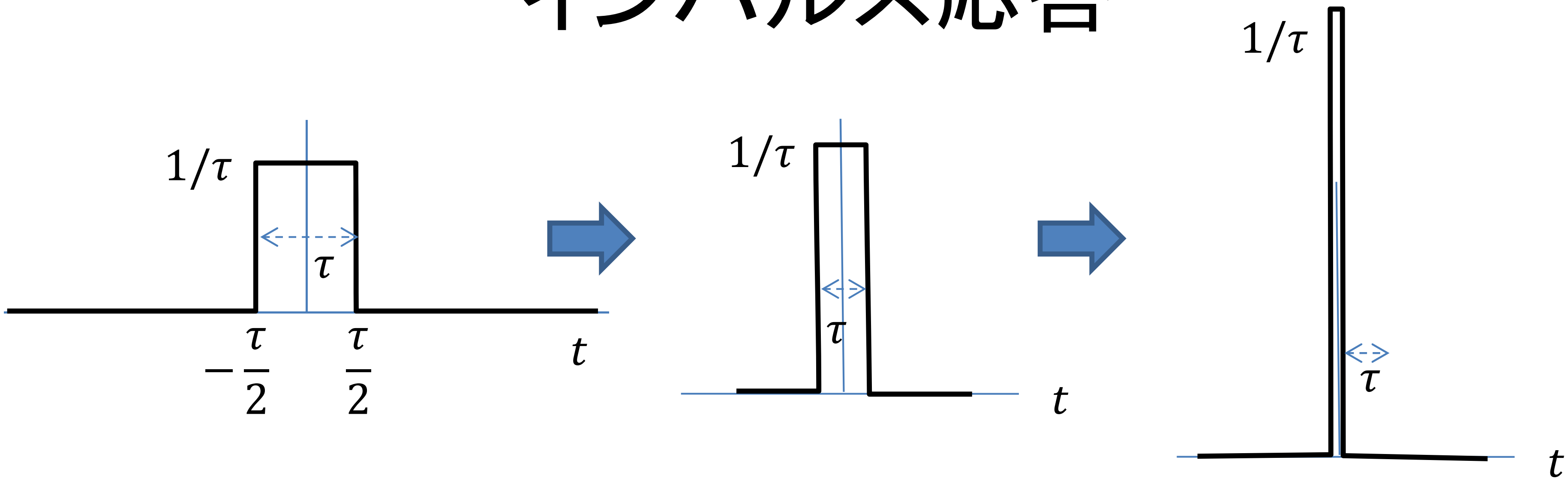
矩形パルスのフーリエ変換

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}(t)\exp(-j2\pi f t)dt$$
$$=\frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f}$$
$$=\mathrm{sinc}(f)$$ SINC関数

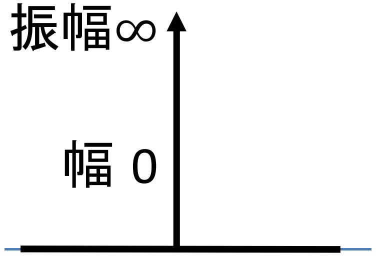


(1)$f=0$で最大値1を持つ
(2) 振幅が最大値の70%となる幅（帯域幅）は$1/\tau$
(3) $f=1/\tau$ 毎に0となり、正負を繰り返す
(4) 振幅の包絡線は $1/f$で低下する

インパルス応答



矩形パルスの $\tau \to 0$ への極限の波形は、



インパルス（デルタ関数 $\delta(t)$ ）と呼ぶ

インパルスのフーリエ変換は $= \dfrac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} = 1$

$x(t) = \delta(t)$ をシステムに入力したときの応答波形は

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t')x(t-t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} h(t')\delta(t-t')dt' = h(t)$$

伝達関数 $H(f)$ の逆フーリエ変換である $h(t)$ はインパルス応答とよばれる

システムの応答時間より十分狭いパルス幅の波形をインパルスとして用いればよい

伝達関数の計測

周波数領域での計測

・発振器により、振幅、位相が一定の正弦波をシステムに入力
・出力正弦波の振幅と位相を計測
・入力と出力の比を計算
・周波数を変えながら計測を何度も繰り返す

伝達関数
$H(f)$

時間領域での計測

・インパルス状の入力波形をシステムに入力する

・出力波形をサンプリング

・出力波形を離散フーリエ変換

δ関数を入力
$x(t) = k\delta(t)$

出力波形　$y(t) = kh(t)$

フーリエ変換

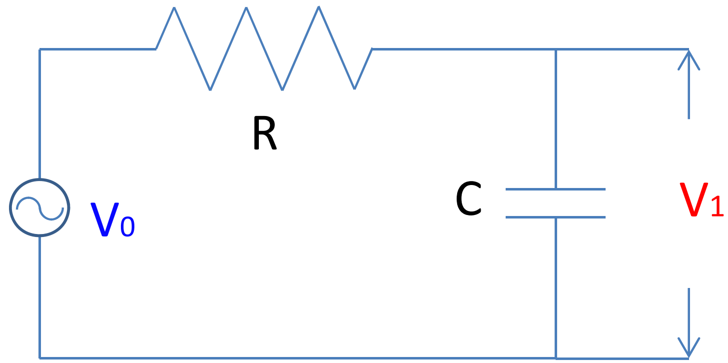
出力スペクトル
$Y(f) = kH(f)$

電気回路の伝達関数

RLC回路では入力した周波数以外の周波数は発生しない

回路中のコンデンサやコイルなどは微分回路、積分回路として働く

すなわち電気回路は線形システムの代表的な例



入力電圧V_0に対する出力電圧V_1を考える。

V_1は回路のインピーダンスZ_{all}がコンデンサCのインピーダンスZ_Cで分圧された値となる

コンデンサCのインピーダンス $$Z_C = \frac{1}{j2\pi fC}$$

回路のインピーダンス $$Z_{all} = R + \frac{1}{j2\pi fC}$$

出力電圧V_1は周波数の関数として、 $$V_1(f) = \frac{Z_C}{Z_{all}} V_0 = \frac{V_0}{1 + j2\pi fCR}$$

伝達関数$H(f)$は入力電圧V_0に対する出力電圧V_1の比なので、

$$\boldsymbol{H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fCR}}$$

ローパスフィルタ

１次RCローパスフィルタの
伝達関数のゲインの理論値

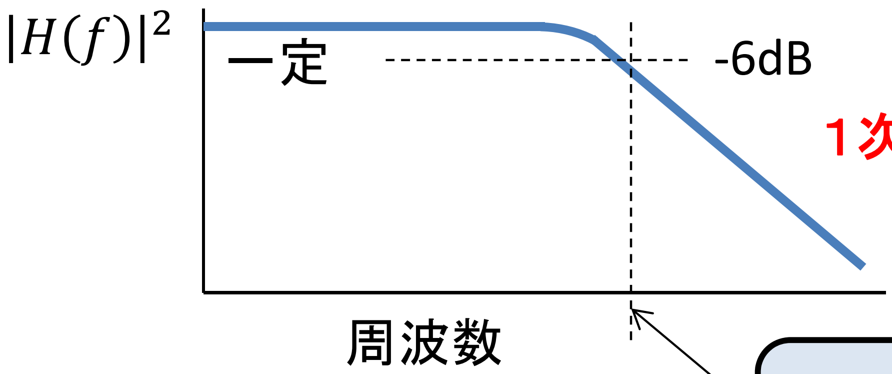
$$|H(f)| = \frac{1}{|1 + j2\pi fCR|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fCR)^2}}$$

$f \ll 1/2\pi CR$　の時　　$|H(f)| = 1$

周波数によらず大きさを変化させない

$f \gg 1/2\pi CR$　の時　　$|H(f)| = \dfrac{1}{2\pi fCR}$

周波数が高くなるほど振幅が小さくなる



１次ローパス特性（低い周波数を通過させる）

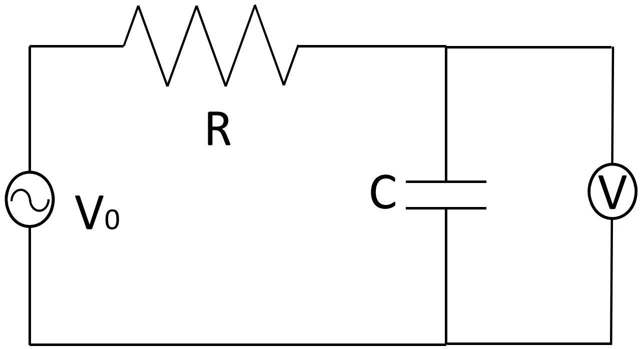
カットオフ周波数　$f_c = \dfrac{1}{2\pi CR}$

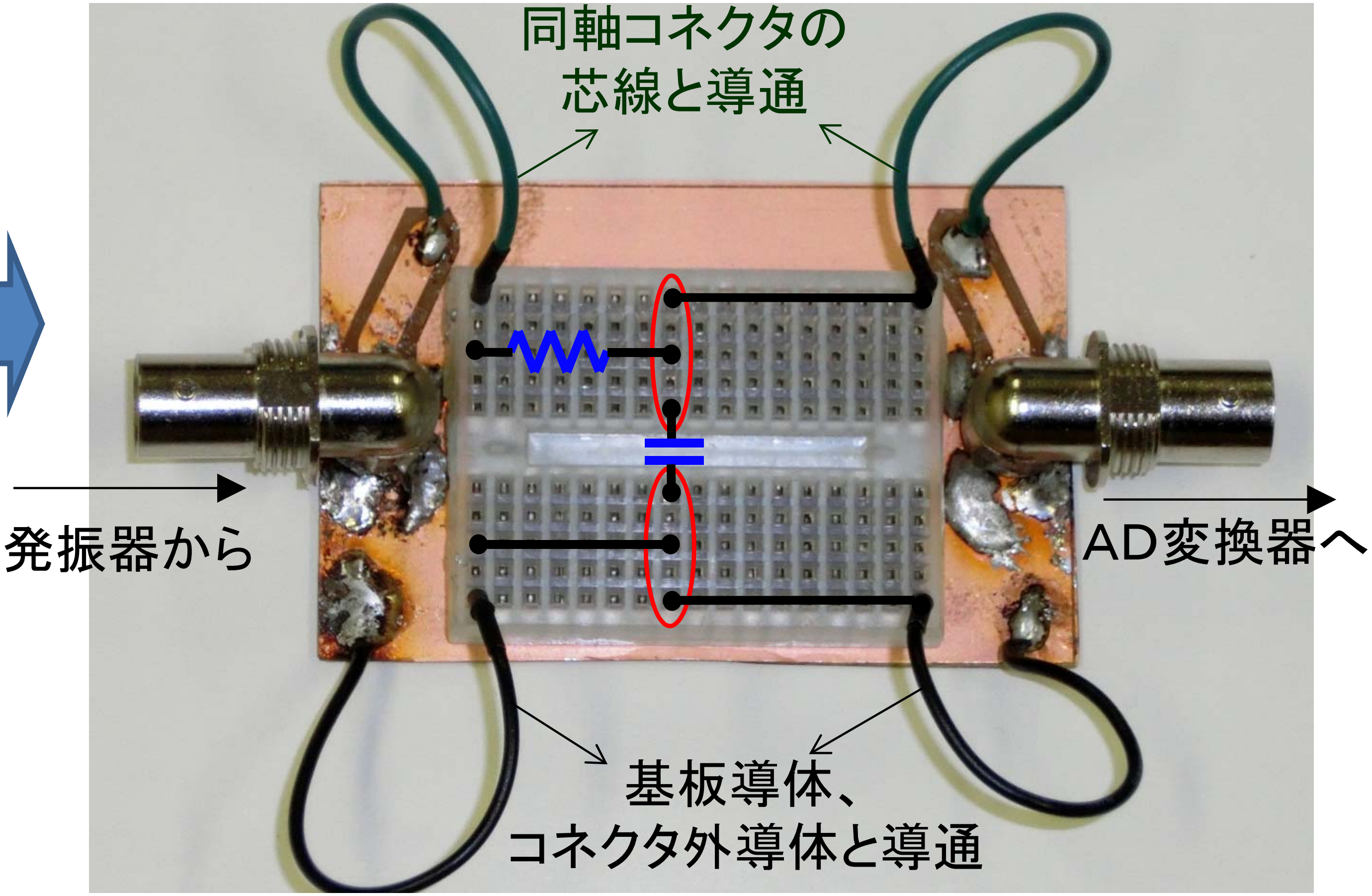
パワー$|H(f)|^2$が半分（振幅$|H(f)|$が70%）
低下する周波数

ブレッドボードによるフィルタの製作

ブレッドボード　簡易に電気回路のテスト等が可能な、半田付けを必要としない基板

多数の穴が配置されており、抵抗の足やジャンパ線を差し込むことで導通させる
縦に隣接する5個の穴の列どうしが導通している
横の穴どうしは絶縁





上のような回路は右図のように配線すればよい

使用できる抵抗値、コンデンサの容量の種類は実験指導書最終ページを参照

2回目課題

実習4

カットオフ周波数を100～500Hzの間で、1次RCローパスフィルタを設計し、ブレッドボードを使って試作せよ。ただし、使用できる容量値、抵抗値は、自由に値を取れないことに注意。（実験指導書16頁フィルタ作成注意点を参照）

さらに、以下に指定した周波数で発振器から正弦波を出力し、試作したフィルタに通過させた後の時間波形をサンプリングし、パワーポイントにコピーして整理せよ。

ただし、サンプリング周波数、ポイント数の設定は各自で考えよ。

また、考察で波形の振幅情報を利用するため、振幅値を読み取れるよう電圧表示幅の設定を工夫しながら計測すること。

計測周波数 [Hz]　5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1k, 2k, 5k, 10k, 20k

考察4

各周波数のフィルタ通過後の出力振幅（ピーク to ピーク 値）からフィルタの伝達関数（出力振幅/入力振幅）を求めよ。ただし、横軸に周波数、縦軸に伝達関数のパワーのデシベル表示（伝達関数の振幅をAとすると$20\log_{10}A$）とする。

2回目課題つづき

実習５
　取り込みソフトの Delay [ms] は、取り込みのタイミング信号から実際に計測を開始するまでに指定した時間の遅延を与える機能である。波形発生器のwaveボタンで矩形波を選択し、Delay を変更することにより、以下のようなパルス幅を持つ単発矩形パルスを作成し、その時間波形とパワースペクトルをパワーポイントにコピーして整理せよ、 ただし、サンプリング周波数を50kHzとし、ポイント数、矩形波の周波数は各自で考えよ。また、フィルタは外しておくこと。

パルス幅　　2ms, 1ms , 0.5ms , 0.2ms, 0.1ms , 0.02ms

考察５
　パワースペクトルの形状がSINC関数の特徴（９頁③、④）を持つこと確かめよ。

実習６
　実習５からインパルスとなる波形を選び、その波形を試作したローパスフィルタに入力し、その出力波形（インパルス応答）をサンプリングせよ。また、その波形のフーリエ変換を行い、伝達関数を求めよ。その際、スペクトルの低周波が1になるよう取り込みソフトの 比較値の値を調整して、印刷せよ。

考察６
　実習６で得られた伝達関数の図上に、考察４で得られた伝達関数の値をプロットし、両者を比較せよ。また、理論値どおりの特性が得られたかどうか考察せよ。

最後に、実験の感想を書いて下さい

レポートはEL棟１F下駄箱奥のレポートBOXに入れること。（上段左から３番目）