

時間領域、周波数領域での伝達関数計測

目的 **サンプリング定理、周波数スペクトル、伝達関数**等の信号処理の基礎となる事項を、実験的に確認し、より直観的に理解できること

1回目

- 1-1 サンプリングとは
- 1-2 ナイキスト条件
- 1-3 離散フーリエ変換
- 1-4 実験システムの概要

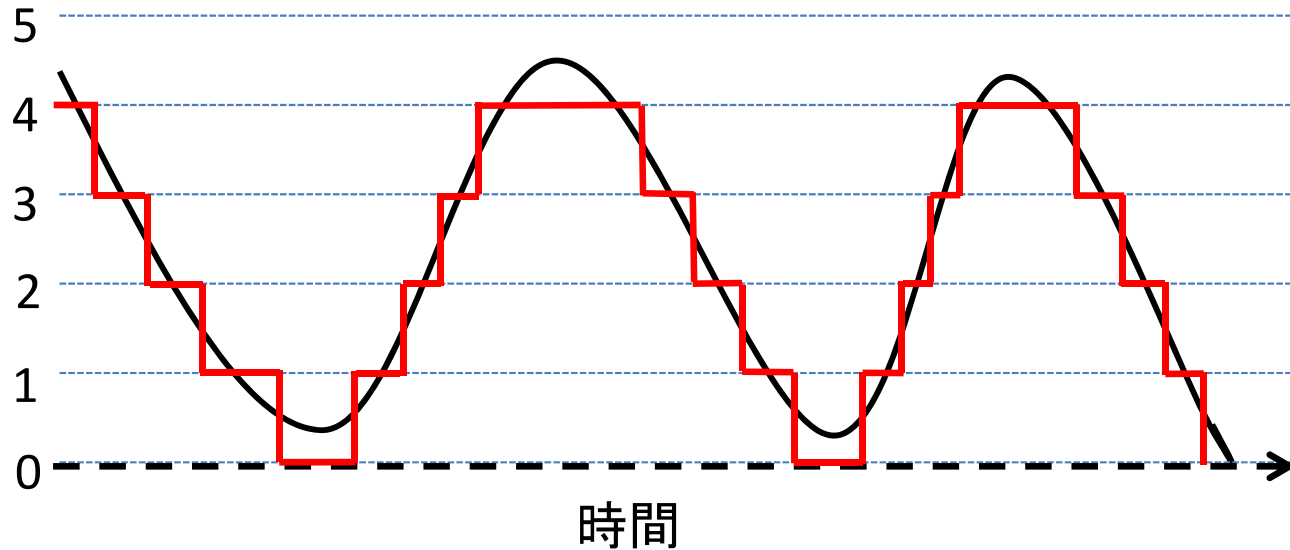
2回目

- 2-1 線形システムの伝達関数
- 2-2 1次RCローパスフィルタの伝達関数
- 2-3 矩形パルスとSINC関数
- 2-4 時間領域によるフィルタ特性評価

- ・実験は二人1組で実施。各回とも最初に説明を行い、実験指導書に従って実験を行う。
- ・各回とも実験結果を基にした考察を行う課題を課す。(考察のみ、目的等は不要)
- ・考察は、実験中に取得した波形を**プリンタで印刷**し、持ち帰って行う。
- ・機器の操作、ソフトウェアの使い方についてわからない場合は**教員、TAにすぐ聞くこと**。
- ・**2回目終了の1週間後(12:40)までに**、結果、考察をレポートとして提出すること。
- ・不十分な内容でもいいのでとにかく提出すること。

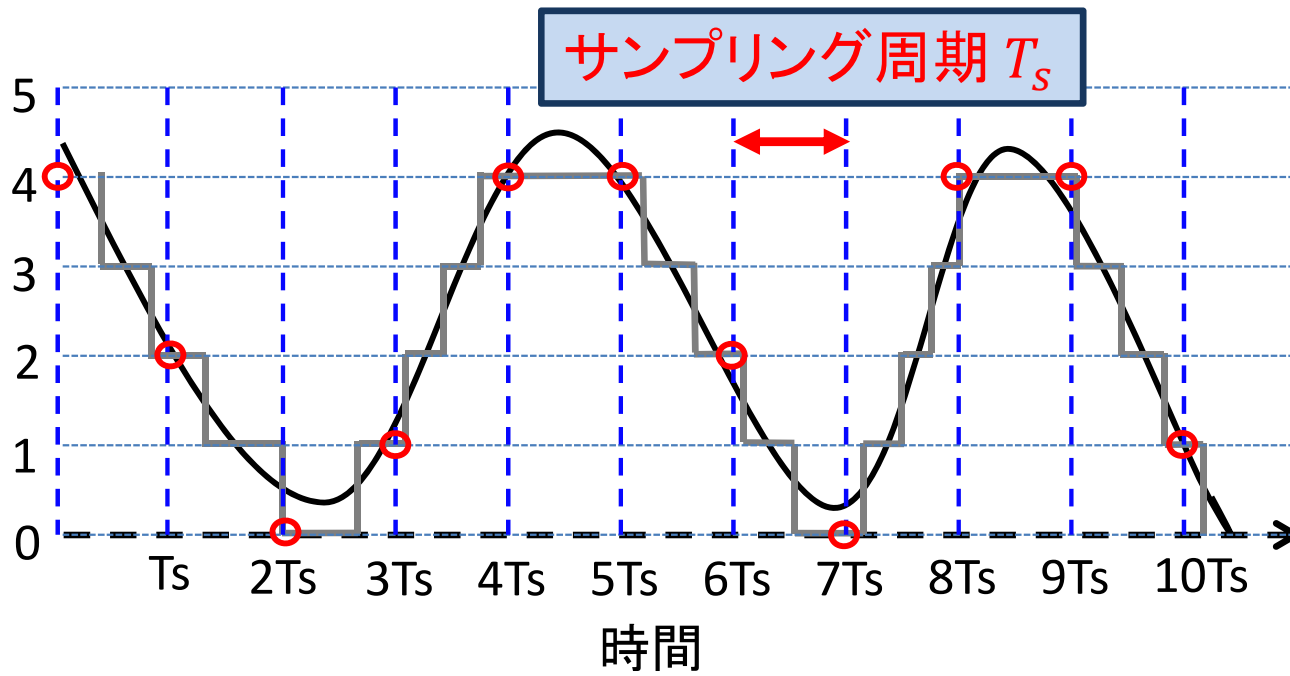
アナログ信号のデジタル化

量子化 → アナログ信号の振幅を階段状に分割



12bit → 2の12乗
4096分割

離散化 → アナログ信号をある周期毎に区切る



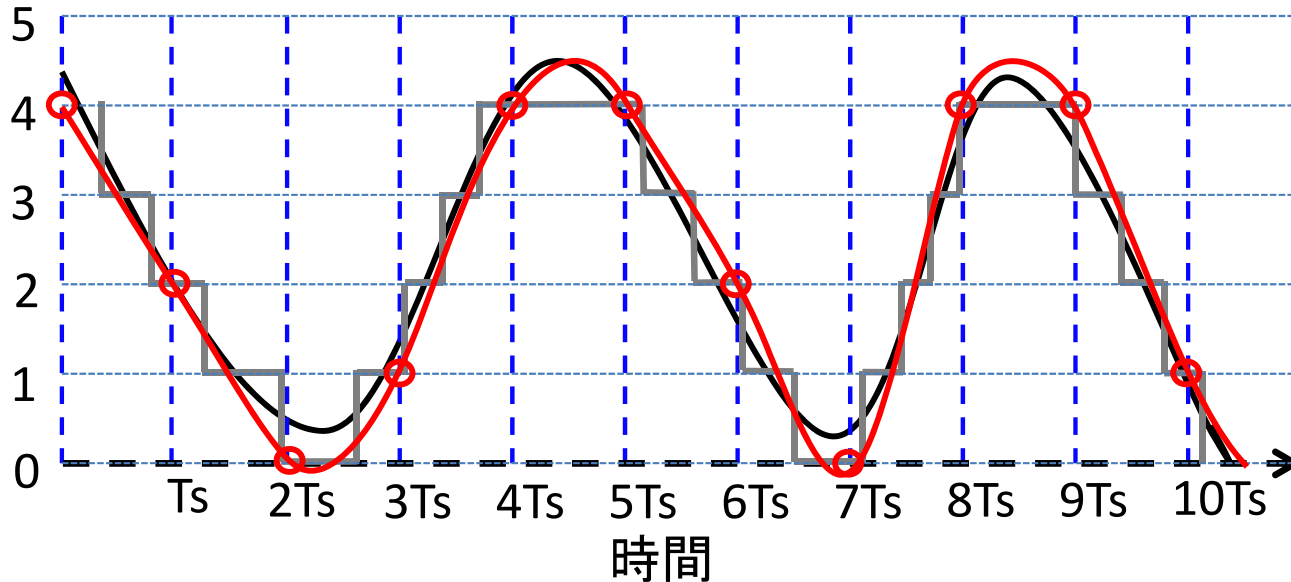
アナログ信号
のデジタル化
(サンプリング)

サンプリング周波数

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

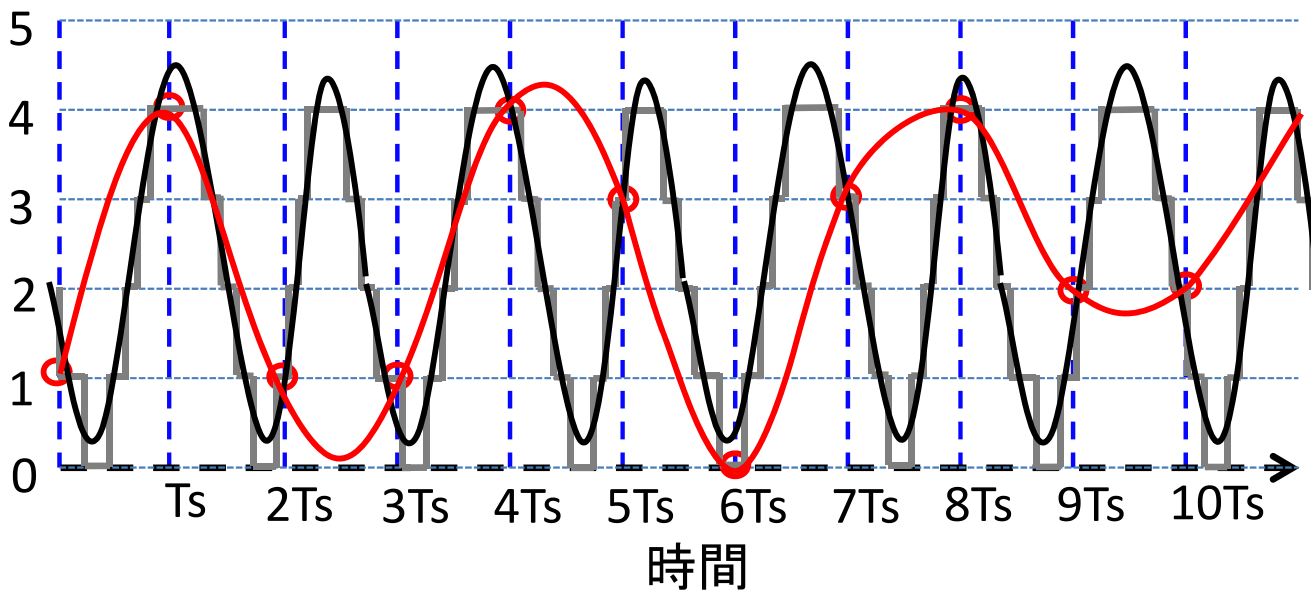
ナイキスト条件

正弦波の周期 $T_0 \gg$ サンプルング周期 T_s



デジタル信号では振幅が量子化されるため、元の信号を完全には再現できないが、**ほぼ再現可能**

正弦波の周期 $T_0 \cong$ サンプルング周期 T_s



元の信号を再現できていない
(エイリアシング)



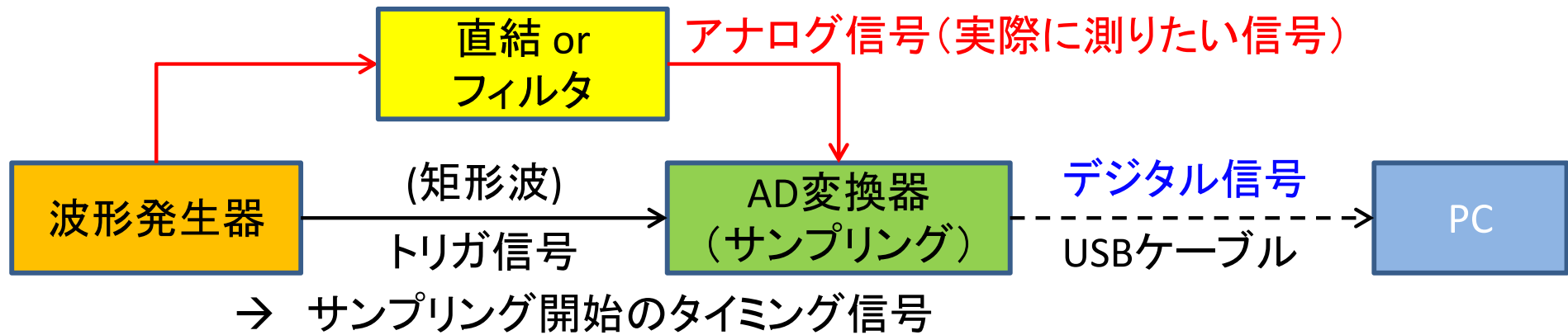
$$T_0 > 2T_s$$

$$f_0 < f_s/2$$

ナイキスト条件

ナイキスト条件を満たさないとき何が起こるか？を理解する実験をしてみよう

実験装置の概要



波形発生器



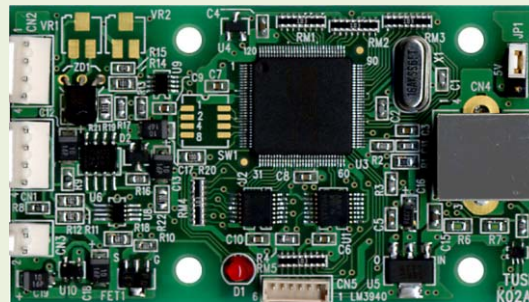
Main出力

周波数、振幅、バイアス可変
正弦波、三角波、矩形波
矩形波はデューティ比可変

TTL/CMOS出力

矩形波のみ出力 (0-5V)
周波数はmain出力と同じ
トリガー出力として利用

AD変換器



量子化bit 12bit

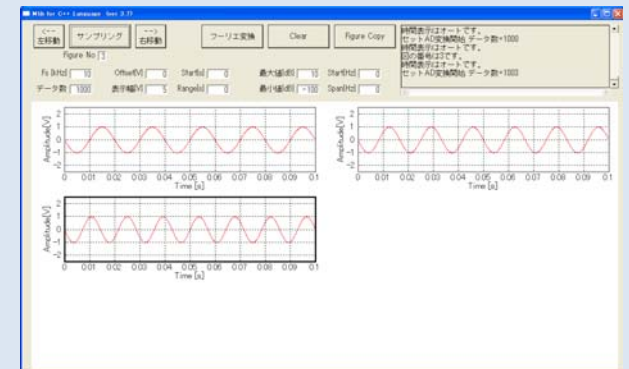
サンプリング周波数 max 100kHz

4チャンネル

入力限界 $\pm 10V$ まで

トリガ信号の立ち上がりでサン
プリング開始

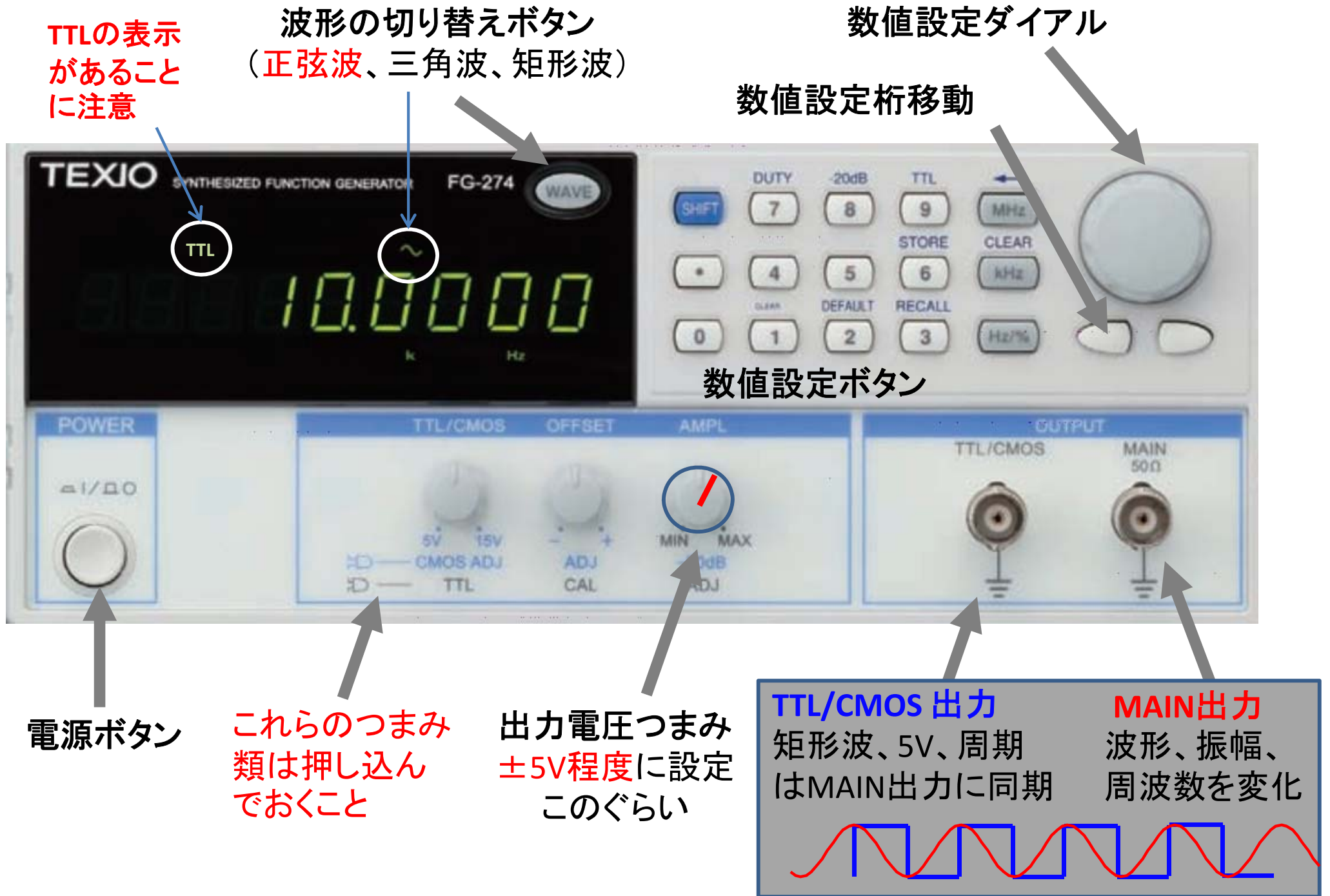
サンプリング周波数、取得デー
タ点数は取り込みソフトで設
定



- ・データ取得ソフトウェア
- ・6波形同時波形表示
- ・離散フーリエ変換
- ・波形演算
- ・図のコピー

- ・Microsoft PowerPoint 2013
- ・図の貼り付け
- ・トリミング、拡大縮小、印刷

波形発生器(FG-274)



AD変換器(TUSB-0412ADSM-S)

量子化bit数 12bit
チャンネル数 4ch
最大サンプリング周波数 100kHz/ch
外部トリガ、内部トリガ

**10V以上の電圧を絶対にか
けないよう注意**



信号入力
サンプリングしたい
信号を入力
波形発生器の
MAIN出力を接続

トリガ入力

波形のサンプリングを開始するタイミ
ングを決める信号を入力
波形発生器のTTL/CMOS出力を接続。

電源はUSBからのバスパワーを利用
USBをつなげば、電源ランプが赤く点灯する

サンプリング信号表示プログラム

プラットフォームはMicrosoft visual C++ 2010 Express Edition (フリー)で作製
三輪研の開発した、無料グラフ作成c言語ライブラリ [mlib 3.7](#) を使用
(Vectorでダウンロード可能)

サンプリングを実行

描画ウィンドウの数
(最大6)

全描画ウィンドウ
のコピー

描画ウィンドウの移動

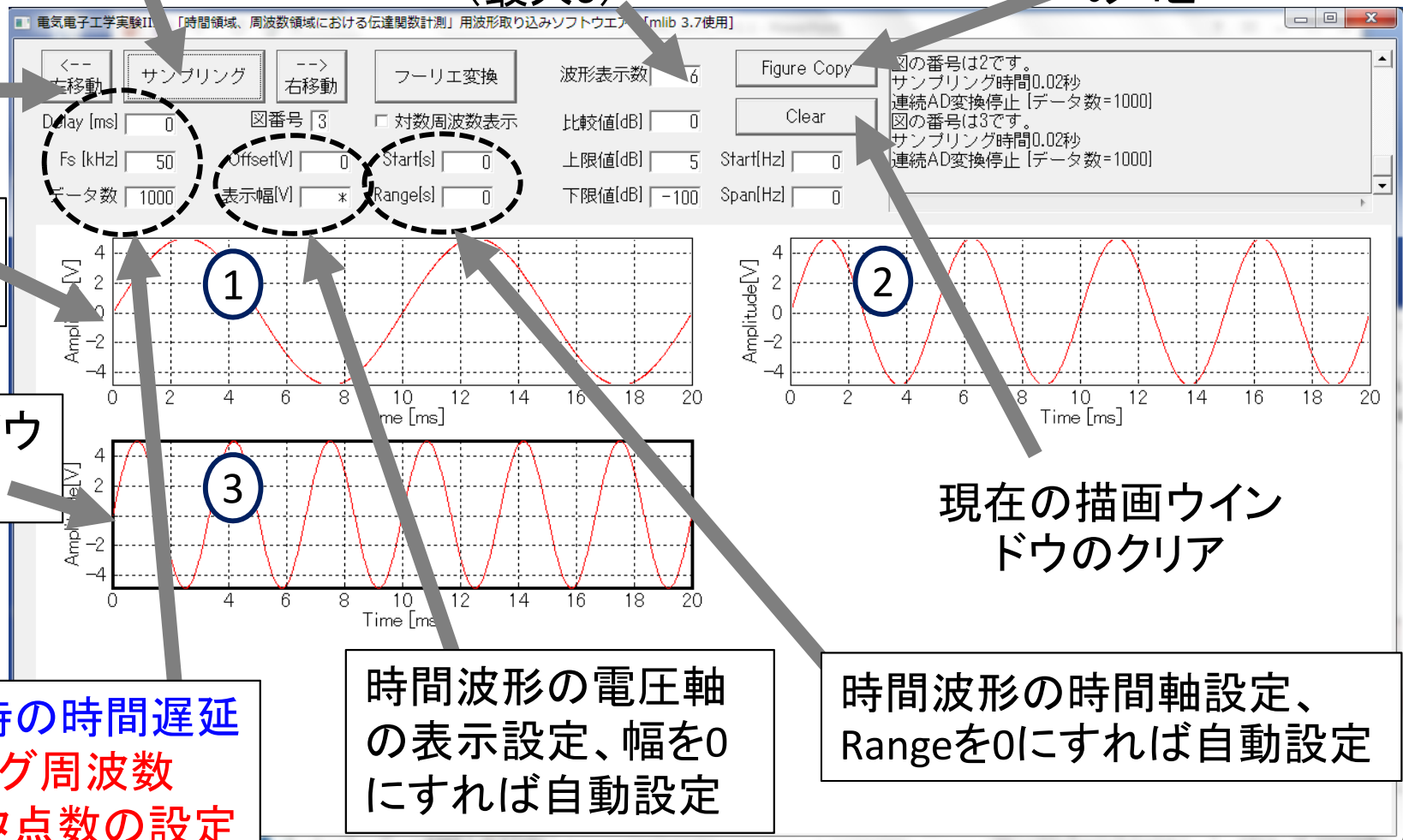
描画ウィンドウ
(最大6番まで)

現在のウィンドウ
(太枠で表示)

取り込み時の時間遅延
サンプリング周波数
取得データ点数の設定

時間波形の電圧軸
の表示設定、幅を0
にすれば自動設定

時間波形の時間軸設定、
Rangeを0にすれば自動設定

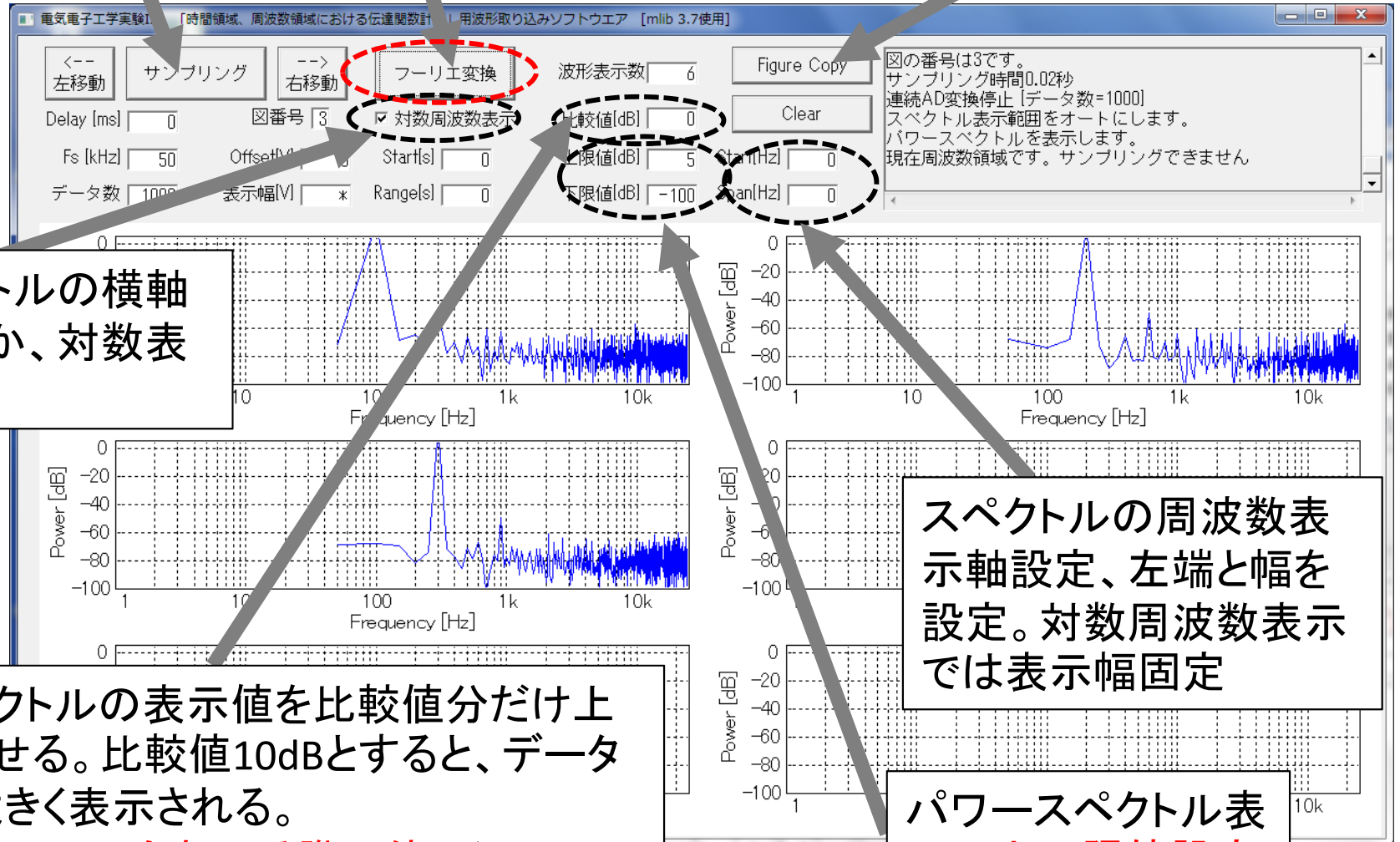


周波数スペクトル表示

このボタンで離散フーリエ変換を実行し、スペクトル表示モードに

サンプリング画面に戻る

全描画ウインドウのコピー



周波数スペクトルの横軸を線形にするか、対数表示にするか

パワースペクトルの表示値を比較値分だけ上下に移動させる。比較値10dBとすると、データが10dB分大きく表示される。
(出力を丁度0dBに合わせる際に使用)

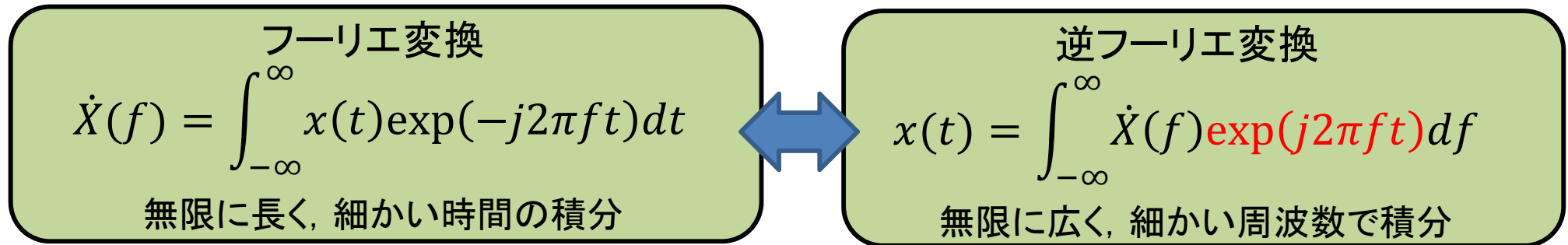
スペクトルの周波数表示軸設定、左端と幅を設定。対数周波数表示では表示幅固定

パワースペクトル表示の上下限值設定

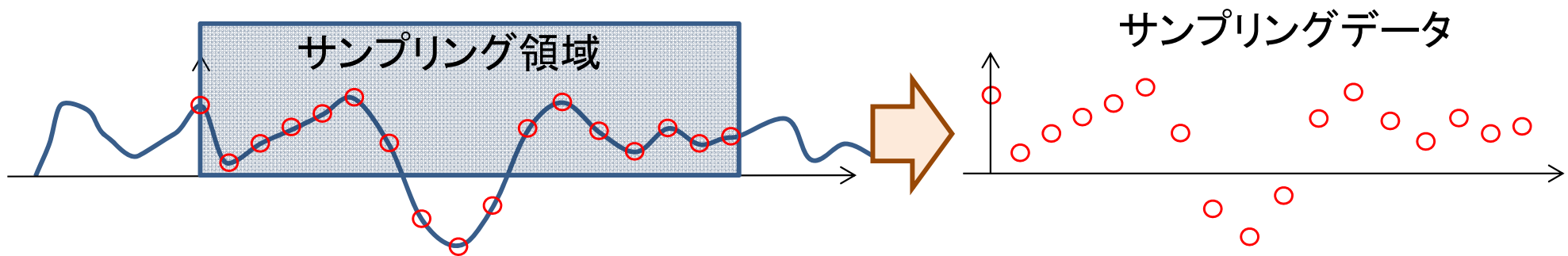
スペクトル表示画面でサンプリングボタンを押しても、時間波形の画面に戻るだけで、サンプリングはされないことに注意。時間波形表示画面でサンプリングボタンを押すこと

フーリエ変換

任意の孤立波形は、
周波数の異なる無限個の 複素正弦波 $\exp(j2\pi ft)$ の
重ね合わせ で必ず表される。



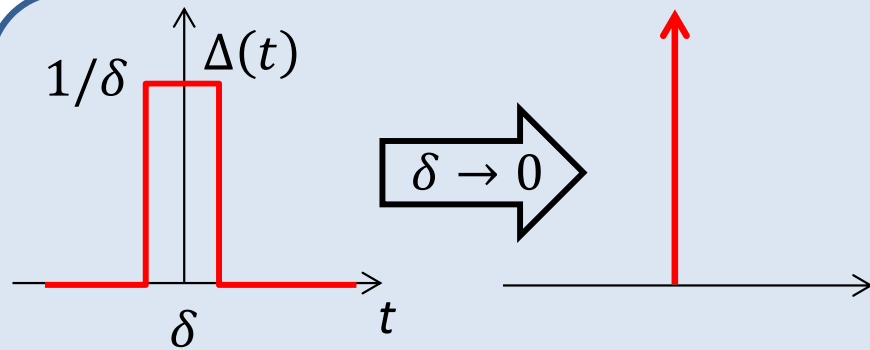
フーリエ変換は無限に長く細かい時間波形から、無限に広く、細かい周波数を推定する式



サンプリング領域前後の波形の情報はない
サンプリング領域内でもサンプリング点間の波形情報はない

有限の時間幅内の有限個のデータ列からどうやって
無限に広い範囲、細かい周波数のスペクトルを計算するのか？

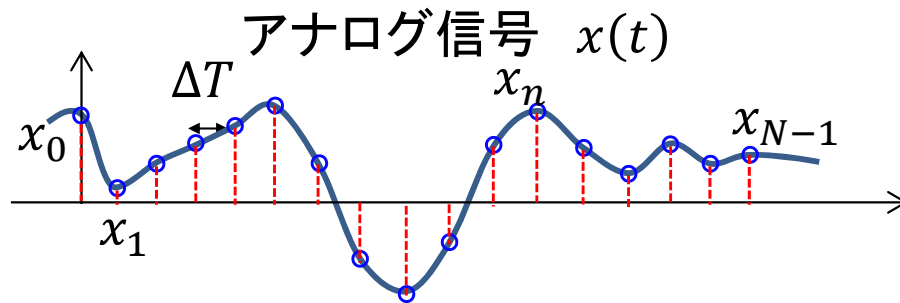
離散信号のパルス列表現



幅 δ 、振幅 $1/\delta$ 、面積1の矩形パルスを考える
 δ を0に近づけたとき

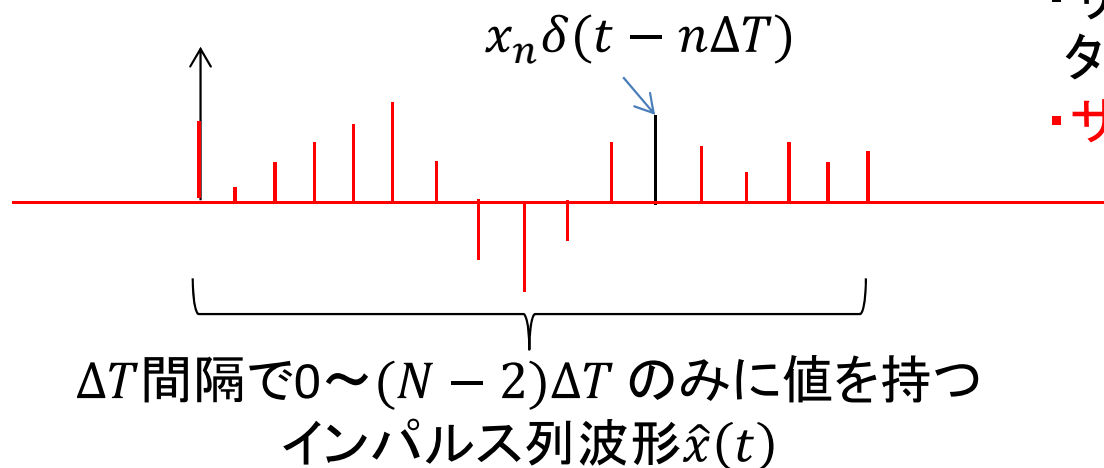
$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta(t) = \delta(t)$ デルタ関数(インパルス)と呼ぶ

$\delta(0) = \infty$ 、 $\delta(t) = 0$ ($t \neq 0$) の連続関数
 デルタ関数のフーリエ変換は1



周期 ΔT でサンプリングした離散データ x_n

N個の離散データの連続波表現にはデルタ関数を使う



- ・サンプリングしたデータ列を、遅延したデルタ関数の級数和で表現
- ・サンプリング点間の波形振幅は0と仮定

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \delta(t - n\Delta T)$$

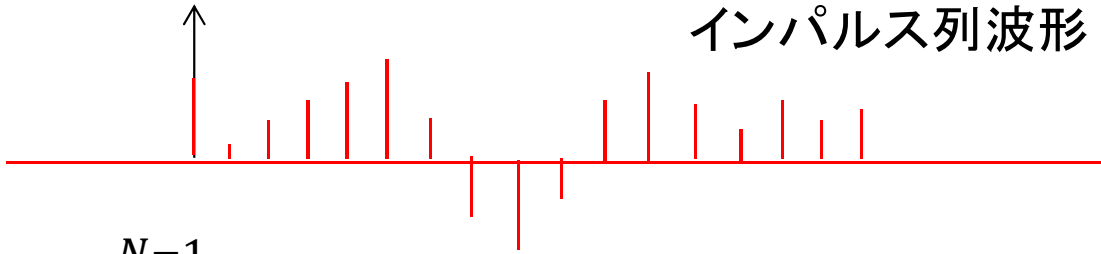
周波数スペクトル範囲の限定

フーリエ変換

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

インパルス列波形

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \delta(t - n\Delta T)$$



$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T) \exp(-j2\pi ft) dt$$

フーリエ変換の移動法則

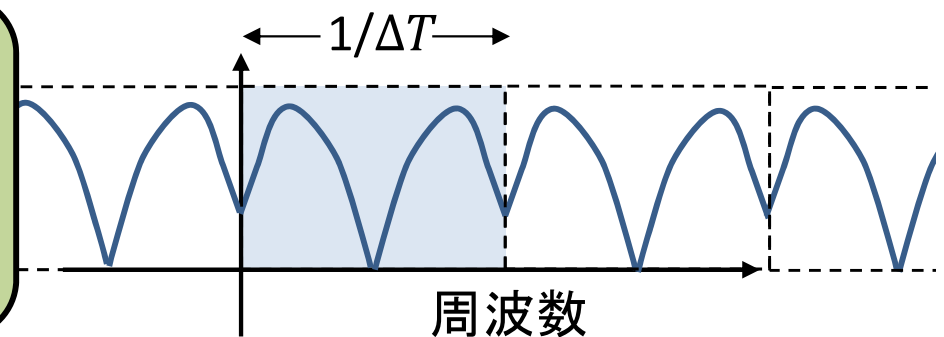
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - a) \exp(-j2\pi ft) dt = F(f) \exp(-j2\pi fa)$$

デルタ関数のフーリエ変換は1より

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi fn\Delta T)$$

サンプリングした信号の周波数スペクトル

- ・インパルス列のスペクトル $X(f)$ は周期関数
- ・ $1/\Delta T$ 毎に同じスペクトルを無限に繰り返す
- 周波数範囲が $1/\Delta T$ の範囲に限定された

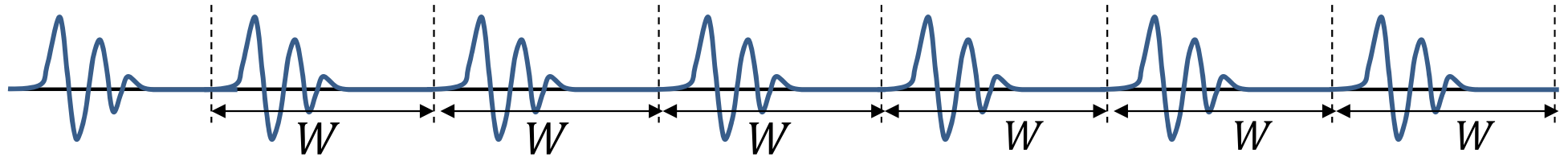


周波数スペクトル分解能の限定

サンプリングされた単発信号は周波数範囲が限定される

- 無限に細かい周波数成分を考えないといけない
- 計算機で扱うのは困難

→ サンプリング信号が周期 $W = N\Delta T$ で無限に繰り返された周期波形を考える

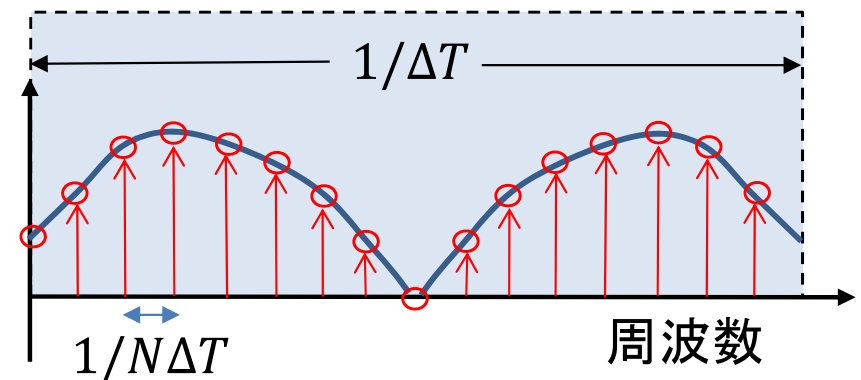


フーリエ級数の知識から、
周期信号の複素スペクトルは線スペクトルとなり、その周波数 f_m は

$$\Delta f = \frac{1}{W} = \frac{1}{N\Delta T} \text{ の整数倍の周波数に限られる。 } f_m = m\Delta f$$

周波数スペクトル分解能の限定

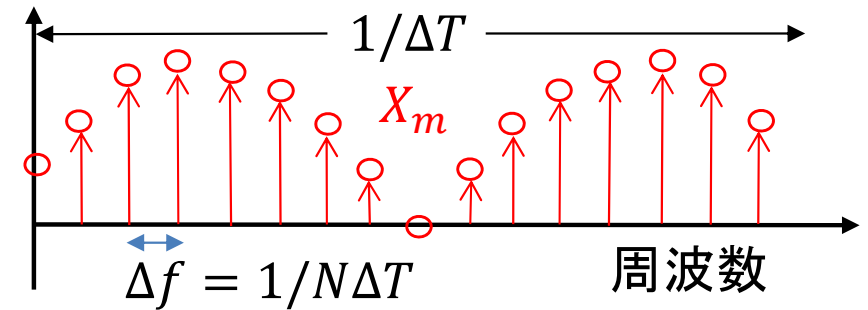
周波数範囲 $1/\Delta T$ までのスペクトルのうち、
 $\Delta f = 1/N\Delta T$ の整数倍の N 個の離散的な
周波数スペクトル成分を考えるだけでよい。



離散フーリエ変換 (DFT) の注意点

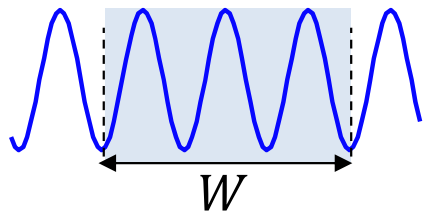
サンプリング間隔 ΔT 、ポイント数 N のデータ列 x_n の離散フーリエ変換 X_m

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j2\pi \frac{mn}{N}\right)$$

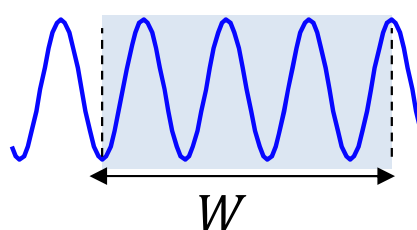


- ・ N 点の離散信号の周波数スペクトルは **N 個の線スペクトル**
- ・ X_m は **N 点毎に周期性**を持ち、負の周波数成分も有している
- ・DFTの周波数スペクトルは**サンプリングした離散信号が無限に繰り返された周期信号のフーリエスペクトルと等価**

区間の両端が連続

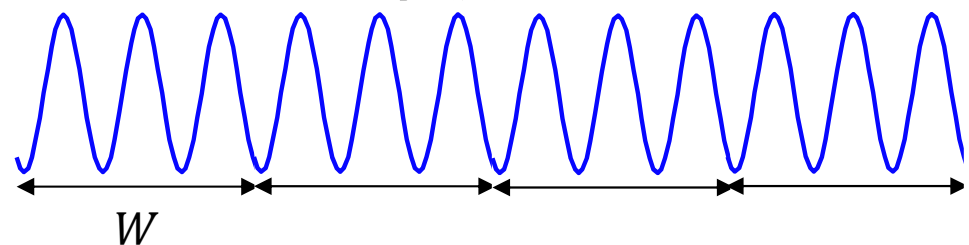


区間の両端が不連続

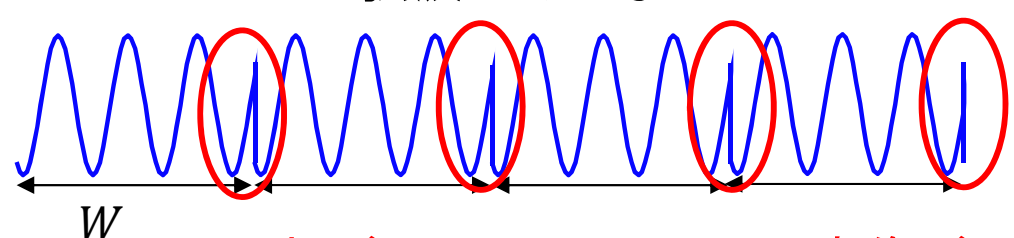


区間 W の信号を離散フーリエ変換したときの等価波形

正弦波にみえる



正弦波にみえない



これが原因でスペクトルに虚像が発生

1回目課題

実習1 以下の指示に従って、波形をサンプリングする実験を行い、各波形をソフトウェアからコピーし、パワーポイントに貼り付けて整理せよ。その際、図から以下の考察ができるよう波形の表示範囲等に注意すること

- ① サンプリング周波数を50 kHzに設定する。データポイント数は5000ポイント
- ② 周波数を10 Hzから二倍ずつ増やしながらサンプリングし、波形を計測(20480Hzまで)
- ③ 次に、サンプリング周波数を10 kHz、ポイント数1000に設定し、同様の実験をせよ

考察1 波形から見える両者の違いについて述べ、何が起きているかナイキスト周波数、サンプリング周波数という言葉を使って説明せよ。

実習2 以下の実験を行い、パワーポイントに貼り付けた実験結果を整理せよ

- ① サンプリング周波数を10 kHz、サンプリングポイント数を1000に設定
- ② 正弦波の周波数を100 Hzから3.2 kHzまで二倍ずつ変えながらサンプリングし、時間波形をパワーポイントに張り付けて整理
- ③ また、時間波形を離散フーリエ変換し、周波数スペクトルもパワーポイントで整理
- ④ ②の設定周波数+1 Hzの正弦波を発生させ、サンプリングを行い、時間波形、周波数スペクトルを同様に整理

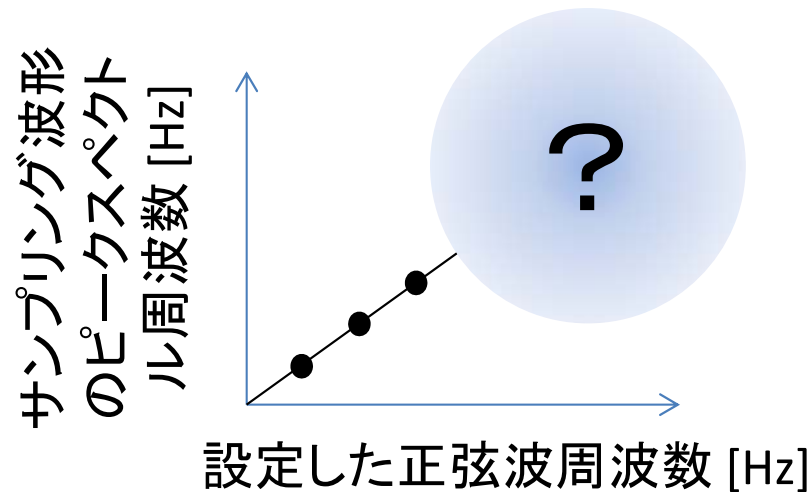
考察2

周波数を1Hz増やした場合、周波数スペクトルに違いが出る理由について考察せよ

1回目課題つづき

実習3 実習1①において、 f_0 が10240 Hzのとき0.1秒間に1024個の波が表れることになるが、実習1③では24個しか観測できず、偽の波が発生していることになる。このような偽の周波数の波が表れる現象をエイリアシングと呼ぶ。

そこで、サンプリング周波数を20 kHz、ポイント数1000に設定し、周波数を2 kHzから48 kHz程度まで2 kHz毎に増やしながらサンプリングし、周波数スペクトルをパワーポイントに貼り付け、整理せよ。さらに、設定周波数とフーリエ変換により得られたピーク周波数の関係を図示せよ。



考察3 フーリエ変換では正と負の周波数スペクトルが存在する。離散フーリエ変換では負の周波数はどこに現れることになるか？設定した周波数とフーリエ変換により得られたピーク周波数の関係から考察せよ